Das Elementare der ebenen Geometrie

Lehmann, Franz Xaver

Karlsruhe, 1888

[Text]

urn:nbn:de:bsz:31-293633

§. 1.

Die Dreiecke sind unter allen Figuren, welche in der Geometrie untersucht werden, die wichtigsten, weil sie die Kenntnis aller übrigen vermitteln. Aus diesem Grunde fanden sie auch vom frühesten Altertume an eine besondere Berücksichtigung.

Man lernte ihre Kongruenz, Ähnlichkeit und Gleichheit kennen, auch wusste man mit Hilfe gewisser Stücke eines Dreieckes, welche gegeben waren, die übrigen nicht gegebenen durch Konstruktion zu finden. Weil aber diese Bestimmungsart, obwohl in manchen Fällen sehr einfach und elegant, doch mit vielen Schwierigkeiten verbunden ist, welche das Resultat ungenau machen, so suchte man die noch fehlenden Stücke aus den gegebenen durch Rechnung zu finden; wie dieses geschieht, lehrt die Trigonometrie und zwar die ebene Trigonometrie, wenn das Dreieck in einer Ebene, und die sphärische Trigonometrie, wenn dasselbe in einer Kugelfläche liegt.

§. 2.

Da die Seiten und Winkel eines Dreieckes ungleichartige Grössen sind, daher nicht unmittelbar durch einander bestimmt werden können, so muss vor allem ein Mittel aufgesucht werden, welches eine Beziehung zwischen Seiten und Winkeln giebt; dieses Mittel findet sich in der Ähnlichkeit der Dreiecke.

Bilden zwei gerade Linien einen Winkel α (Fig. 1) und werden von verschiedenen Punkten der einen parallele und der Einfachheit wegen senkrechte Linie auf die andere gezogen, so entstehen ebenso viele unter sich ähnliche Dreiecke

In Figur 1 ist $a\,b_1\,c_1 \sim a\,b_2\,c_2 \sim a\,b_3\,c_3 \ldots$, daher ist auch:

$$1)\quad \frac{b_1\,c_1}{a\,c_1} = \frac{b_2\,c_2}{a\,c_2} = \frac{b_3\,c_3}{a\,c_3} = \ldots$$

$$2)\quad \frac{b_1\,a}{a\,c_1} = \frac{b_2\,a}{a\,c_2} = \frac{b_3\,a}{a\,c_3} = \ldots$$

$$3)\quad \frac{b_1\,c_1}{a\,b_1} = \frac{b_2\,c_2}{a\,b_2} = \frac{b_3\,c_3}{a\,b_3} = \ldots$$

$$4)\quad \frac{a\,b_1}{b_1\,c_1} = \frac{a\,b_2}{b_2\,c_2} = \frac{a\,b_3}{b_3\,c_3} = \ldots$$

$$5)\quad \frac{a\,c_1}{a\,b_1} = \frac{a\,c_2}{a\,b_2} = \frac{a\,c_3}{a\,b_3} = \ldots$$

$$6)\quad \frac{a\,c_1}{b_1\,c_1} = \frac{a\,c_2}{b_2\,c_2} = \frac{a\,c_3}{b_3\,c_3} = \ldots$$

Dieses findet statt, so lange der Winkel α unverändert bleibt, würde er sich ändern und dem Winkel γ gleich werden, so würden ähnliche Gleichungen entstehen, wie die für α erhaltenen, allein die Verhältnisse für den Winkel α wären den γ zugehörigen nicht gleich; so ist z. B.:

$$\frac{d_1\,b_1}{a\,d_1} > \frac{c_1\,b_1}{a\,c_1}.$$

Wie also die Winkel sich ändern, müssen sich auch die Verhältnisse ändern, oder sobald sich die Verhältnisse ändern, verändern sich auch die zugehörigen Winkel. Verhältnisse und Winkel bilden also zwei veränderliche Grössen, welche in ihren Veränderungen von einander abhängig sind, die einen sind daher Funktionen*) der andern und in Beziehung auf die Dreiecke trigonometrische Funktionen. Nun sind aber die Winkel selbst wieder Funktionen von den zugehörigen Kreisbogen, deshalb sind auch diese abhängig von den entsprechenden Verhältnissen; sie führen zum Unterschiede von den erstern den Namen Kreisfunktionen.

§. 3.

Um leichter eine Einsicht in die Veränderungen der Funktionen zu erhalten und zu gleicher Zeit ein gemeinschaftliches Mass für dieselben zu gewinnen, werden die Winkel als Centriwinkel desselben Kreises betrachtet. Wird nun Winkel α (Fig. 2) Centriwinkel, so sind durch die Peripherie zwei Punkte in seinen Seiten bestimmt, wenn vom Punkte m auf den Radius g h eine Senkrechte gefällt

*) Das Wort kommt aus der lateinischen Sprache und bedeutet: Verrichtung, Verrichtung einer Arbeit gegen Lohn. Dieser ist veränderlich und abhängig von der Arbeit. Der Lohn ist also eine Funktion der Arbeit und umgekehrt. Ähnlich sind die Seitenverhältnisse Funktionen der Winkel.

und von dem Punkte h aus eine solche errichtet wird bis zu dem verlängerten Radius g m, so entstehen zwei ähnliche Dreiecke. Ebenso lassen sich für β, dem Winkel welcher α zu 90° ergänzt, Dreiecke bilden. Diese Dreiecke sind unter sich ähnlich, daher finden auch die folgenden Gleichungen statt (Fig. 1 und 2):

$$1)\quad \frac{b_1 c_1}{a c_1} = \frac{b_2 c_2}{a c_3} = \frac{b_3 c_3}{a c_3} = \ldots = \frac{ml}{mg}$$

$$2)\quad \frac{b_1 c_1}{a b_1} = \frac{b_2 c_2}{a b_2} = \frac{b_3 c_3}{a b_3} = \ldots = \frac{nh}{hg}$$

$$3)\quad \frac{a c_1}{a b_1} = \frac{a c_2}{a b_2} = \frac{a c_3}{a b_3} = \ldots = \frac{ng}{hg}$$

$$4)\quad \frac{a b_1}{a c_1} = \frac{a b_2}{a c_2} = \frac{a b_3}{a c^3} = \ldots = \frac{md}{mg} = \frac{lg}{mg}$$

$$5)\quad \frac{a b_1}{b_1 c_1} = \frac{a b_2}{b_2 c_2} = \frac{a b_3}{b_3 c_3} = \ldots = \frac{ef}{eg} = \frac{hg}{nh}$$

$$6)\quad \frac{a c_1}{b_1 c_1} = \frac{a c_2}{b_2 c_2} = \frac{a c_3}{b_3 c_3} = \ldots = \frac{fg}{eg} = \frac{ng}{nh}$$

Die Quotienten der drei ersteren Gleichungen sind zunächt die Funktionen des Winkels α und jene der drei letzteren die Funktionen des Ergänzungswinkels β oder Complementfunktionen, Cofunktionen für α.

§. 4.

Die verschiedenen Funktionen und Cofunktionen haben besondere Namen und Zeichen erhalten, nämlich:

I. Der Quotient aus der gegenüberliegenden Kathete und der Hypotenuse ist Sinus des Winkels

$$\frac{b_1 c_1}{a c_1} = \sin \alpha.\text{*)}$$

Im Kreise ist der Sinus eines Winkels die Senkrechte, welche vom Endpunkte eines Radius auf den andern gefällt ist, gemessen durch den Radius

$$\frac{ml}{mg} = \frac{ml}{r} = \sin \alpha, \text{ wenn der Radius r ist.}$$

*) Sinus soll eine Abkürzung sein aus semissis in scripta; soviel als halbe eingeschriebene Sehne.

II. Der Quotient aus der gegenüberliegenden Kathete und der anliegenden ist Tangente des Winkels

$$\frac{b_1 c_1}{a b_1} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Im Kreise ist die Tangente eines Winkels die Senkrechte, welche vom Endpunkte eines Radius bis zu dem verlängerten anderen errichtet ist, gemessen durch den Radius

$$\frac{nh}{hg} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{nh}{r}.$$

III. Der Quotient aus der Hypotenuse und der anliegenden Kathete ist die Secante eines Winkels

$$\frac{a c_1}{a b_1} = \sec \alpha.$$

Im Kreise ist Secante eines Winkels der bis zur Tangente verlängerte Radius, gemessen durch den Radius

$$\frac{gn}{gh} = \sec \alpha = \frac{gn}{r}.$$

IV. Der Quotient aus der anliegenden Kathete und der Hypotenuse ist Cosinus des Winkels

$$\frac{a b_1}{a c_1} = \cos \alpha.^{*)}$$

Im Kreise werden die Cofunktionen als Funktionen des Ergänzungswinkels konstruirt

$$\frac{md}{mg} = \frac{gl}{r} = \cos \alpha.$$

V. Der Quotient aus der anliegenden Kathete und der gegenüberliegenden ist die Cotangente des Winkels

$$\frac{a b_1}{b_1 c_1} = \operatorname{cotg} \alpha.$$

Im Kreise ist

$$\frac{ef}{eg} = \frac{ef}{r} = \operatorname{cotg} \alpha = \frac{gh}{hn}.$$

---

*) Ähnlich wie sich die Bezeichnung „Cofunktionen" gebildet hat aus: Complementi functiones, entstanden auch cos, cotg, cosec aus Complementi sinus etc.

VI. Der Quotient aus der Hypotenuse und der gegenüberliegenden Kathete ist die Cosecante des Winkels

$$\frac{a\,c_1}{b_1\,c_1} = \operatorname{cosec} \alpha.$$

Im Kreise ist

$$\frac{g\,f}{e\,g} = \frac{g\,f}{r} = \operatorname{cosec} \alpha = \frac{g\,n}{g\,h}.$$

Zu diesen Funktionen kommen noch zwei etwas seltener gebrauchte, nämlich:

VII. Die Differenz zwischen dem Radius und Cosinus als: Sinus versus.
VIII. Die Differenz zwischen dem Radius und Sinus als: Cosinus versus.

§. 5.

Diese Funktionen lassen sich gegenseitig bestimmen mittelst des pythagoräischen Lehrsatzes und der Ähnlichkeit der Dreiecke.

Durch die Anwendung des ersteren entsteht aus Fig. 2

$$1)\quad m\,l^2 + l\,g^2 = m\,g^2.$$

Nach I. ist aber $m\,l = r \,.\, \sin \alpha$, daher $m\,l^2 = r^2 \sin^2 \alpha$; ebenso nach IV. $g\,l = r \,.\, \cos \alpha$, also $g\,l^2 = r^2 \,.\, \cos^2 \alpha$; es ist daher für $m\,g = r$:

$$r^2 \sin^2 \alpha + r^2 \cos^2 \alpha = r^2, \text{ oder}$$

IX. $$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

$$2)\quad h\,n^2 + h\,g^2 = n\,g^2.$$

Aus II. ist aber $h\,n^2 = r^2 \operatorname{tg}^2 \alpha$ und aus III. $g\,n^2 = r^2 \,.\, \sec^2 \alpha$, $h\,g = r$, daher

$$r^2 \operatorname{tg}^2 \alpha + r^2 = r^2 \,.\, \sec^2 \alpha, \text{ also auch}$$

X. $$\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \sec^2 \alpha.$$

$$3)\quad e\,f^2 + e\,g^2 = g\,f^2.$$

Aus V. ist $e\,f^2 = r^2 \,.\, \operatorname{cotg}^2 \alpha$ und nach VI. $g\,f^2 = r^2 \,.\, \operatorname{cosec}^2 \alpha$, $e\,g = r$, also

$$r^2 \operatorname{cotg}^2 \alpha + r^2 = r^2 \,.\, \operatorname{cosec}^2 \alpha \text{ und}$$

XI. $$\operatorname{cotg}^2 \alpha + 1 = \operatorname{cosec}^2 \alpha.$$

Von den Proportionen, welche sich aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ableiten lassen, gehören die folgenden:

1) Aus $lmg \sim hng$ folgt:

$lm : lg = hn : hg$, nun ist aber nach I., IV. und II.

$lm = r \cdot \sin\alpha$, $lg = r \cdot \cos\alpha$, $hn = r \cdot tg\,\alpha$, $hg = r$, daher

$r \cdot \sin\alpha : r \cdot \cos\alpha = r \cdot tg\,\alpha : r$, oder

XII. $\sin\alpha : \cos\alpha = tg\,\alpha : 1$, und $tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Aus denselben Dreiecken folgt ferner:

$lg : mg = hg : ng$, und die Werte für diese Grössen aus IV. und III. gesetzt: $r \cdot \cos\alpha : r = r : r \cdot \sec\alpha$ und

XIII. $\cos\alpha : 1 = 1 : \sec\alpha$, oder $\cos\alpha = \frac{1}{\sec\alpha}$.

2) da $lmg \sim gef$, folgt:

$lm : mg = eg : fg$, für lm und fg aus I. und IV. die Werte eingeführt: $r \cdot \sin\alpha : r = r : r \cdot \mathrm{cosec}\,\alpha$ oder

XIV. $\sin\alpha : 1 = 1 : \mathrm{cosec}\,\alpha$ und $\sin\alpha = \frac{1}{\mathrm{cosec}\,\alpha}$.

3) Aus $hgn \sim gef$ ergiebt sich:

$hn : gh = eg : ef$ und unter Berücksichtigung von II. und V. $r \cdot tg\,\alpha : r = r : r \cdot \mathrm{cotg}\,r$ und

XV. $tg\,\alpha : 1 = 1 : \mathrm{cotg}\,\alpha$, woraus $tg\,\alpha = \frac{1}{\mathrm{cotg}\,\alpha}$.

4) Aus $lmg \sim gef$ folgt noch:

$lm : lg = eg : ef$ und nach I., IV. und V.

$r \cdot \sin\alpha : r \cdot \cos\alpha = r : r \cdot \mathrm{cotg}\,\alpha$ oder

XVI. $\sin\alpha : \cos\alpha = 1 : \mathrm{cotg}\,\alpha$ und $\mathrm{cotg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Zur gegenseitigen Bestimmung der Funktionen erhält man aus IX., X. und XI. unmittelbar:

a) $\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}$, $\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha}$, $tg\,\alpha = \sqrt{\sec^2\alpha - 1}$, $\mathrm{cotg}\,\alpha = \sqrt{\mathrm{cosec}^2\alpha - 1}$, $\sec\alpha = \sqrt{1 + tg^2\alpha}$, $\mathrm{cosec}\,\alpha = \sqrt{1 + \mathrm{cotg}^2\alpha}$.

$$\text{b)}\quad \sin\alpha = \frac{1}{\operatorname{cosec}\alpha},\ \cos\alpha = \frac{1}{\sec\alpha},\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{cotg}\alpha},\ \operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha},$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha},\ \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}.$$

Werden in diesen Gleichungen für die Divisoren ihre Werte aus a gesetzt, so ist:

$$\text{c)}\ \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2\alpha}},\ \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}},\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2\alpha - 1}},$$

$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{\sec^2\alpha - 1}},\ \sec\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^1\alpha}},\ \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}};$$

Aus XIII, XIV, XV:

Hier werden die Werte für die Funktionen unter dem Wurzelzeichen aus b gesetzt, erhält man unter Berücksichtigung von XII und XVI:

$$\text{d)}\ \sin a = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}},\ \cos\alpha = \frac{\operatorname{cotg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2\alpha}},\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}},$$

$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}},\ \sec\alpha = \frac{\operatorname{cosec}\alpha}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2\alpha - 1}},\ \operatorname{cosec}\alpha = \frac{\sec\alpha}{\sqrt{\sec^2\alpha - 1}};$$

und nun die Werte für Zähler und Nenner aus a eingeführt:

$$\text{e)}\ \sin\alpha = \frac{\sqrt{\sec^2\alpha - 1}}{\sec\alpha},\ \cos\alpha = \frac{\sqrt{\operatorname{cosec}^2\alpha - 1}}{\operatorname{cosec}\alpha},\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha},$$

$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha},\ \sec\alpha = \frac{\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2\alpha}}{\operatorname{cotg}\alpha},\ \operatorname{cosec}\alpha = \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

§. 6.

Sobald sich der Winkel α ändert, müssen sich auch die zugehörigen Funktionen ändern; doch ist ihre Veränderung der des Winkels nicht proportional. Wird eine Seite des Winkels fest und die andere um den Durchschnittspunkt beweglich gedacht, so lassen sich die Gesetze dieser Veränderungen leicht allgemein ausdrücken, wenn der Radius des Kreises, welchen die bewegliche Seite beschreibt, als Einheit genommen wird. Alsdann ist $2 . 1 . \pi = 360°$, $\pi = 180°$, $\frac{\pi}{2} = 90°$, $\frac{\pi}{4} = 45°$ etc.

1) Änderung des Sinus. Wird $\alpha = 0$, so werden auch, in Fig. 1 und 2, $b_1 c_1$ und $m l = 0$; es ist also $\sin 0 = \frac{0}{a c_1} = \frac{0}{r} = 0$; so oft die bewegliche Seite bei ihren Drehungen nach derselben Richtung mit der andern zusammentrifft, ist auch der Sinus $= 0$, also für die Winkel $0°$, 2π, 4π, $6\pi \ldots 2n\pi$, wenn n irgend eine ganze Zahl bedeutet. Daher

XVII. $$\sin 2n\pi = 0.$$

Wächst α von 0 an, so nimmt auch der Sinus zu, für $\alpha = 90°$ wird $b_1 c_1 = a c_1$ und $l m = r$, also $\sin 90° = \frac{a_1 c_1}{a c_1} = \frac{r}{r} = +1$.

Diesen Wert erhält der Sinus jedesmal, so oft die bewegliche Seite bei gleichgerichteter Drehung, welche auch für die folgenden Änderungen vorausgesetzt sein soll, wieder dahin gelangt, also für die Winkel

$\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} + 2\pi$, $\frac{\pi}{2} + 4\pi$, ... $\frac{\pi}{2} + 2n\pi$. Es ist daher

XVIII. $$\sin\left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi = +1.$$

Nimmt α zu von $90°$ bis $180°$, so kommt die Sinuslinie auf die nach entgegengesetzter Richtung verlängerte unbewegliche Seite normal zu stehen und nimmt ab bis 0, also ist allgemein für einen Winkel $\pi + 3\pi + 5\pi \ldots (2n+1)\pi$

XIX. $$\sin(2n+1)\pi = \pm 0.$$

Von $180°$ an muss die Sinuslinie in entgegengesetzter Richtung auf die unbewegliche Seite gezogen werden, ist also negativ, und erreicht ihr Minimum bei $270°$, allgemein bei $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2} + 2\pi$. $\frac{3\pi}{2} + 4\pi$, ... $\left(2n + \frac{3}{2}\right) . \pi$, so dass

XX. $$\sin\left(2n + \frac{3}{2}\right) . \pi = \frac{-a c_1}{a c_1} = \frac{-r}{r} = -1 \text{ ist.}$$

Bei einer von 270° an fortgesetzter Drehung bis zu 360° nimmt der Sinus wieder zu und wird, nach XVII., bei 360° gleich 0.

Wenn α von 0° an abnimmt, so wird:

XXI. $$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha.$$

2) Änderung des Cosinus. Für $\alpha = 0$ wird $a\,b_1 = a\,c_1$ und $g\,l = r$, daher $\cos 0 = \frac{a\,c_1}{a\,c_1} = \frac{r}{r} = 1$, dasselbe findet auch statt für die Winkel 2π, 4π, $6\pi \ldots 2n\pi$, daher

XXII. $$\cos(2n\pi) = +1.$$

Wird α grösser und wächst bis 90°, so wird der Cosinus kleiner und bei $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} + 2\pi$, $\frac{\pi}{2} + 4\pi, \ldots \left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi$ gleich 0, also

XXIII. $$\cos\left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi = 0.$$

Von 90° an erhält die Cosinuslinie eine der ursprünglichen entgegengesetzte Richtung, wird also negativ und erreicht ihre unterste Grenze bei π, $2\pi + \pi$, $4\pi + \pi \ldots (2n+1)\pi$, deshalb ist, da $a\,b_1 = -a\,c_1$ und $l\,g = -r$, $\cos 180° = \frac{-a\,c_1}{a\,c} = \frac{-r}{r} = -1$, und

XXIV. $$\cos(2n+1)\pi = -1.$$

Wächst α bis zu 270°, so nehmen $a\,b_1$ und $-l\,g$ wieder zu und werden für diese Grenze $= 0$, was auch stattfindet bei $\frac{3\pi}{2}$, $2\pi + \frac{3\pi}{2}$, $4\pi + \frac{3\pi}{2}, \ldots \left(2n + \frac{3}{2}\right)\pi$, also ist

XXV. $$\cos\left(2n + \frac{3}{2}\right)\pi = 0.$$

Von hier an nimmt der Cosinus immer zu und erreicht bei 360°, nach XXII., wieder die positive Grenze 1.

Wenn die bewegliche Seite sich nach der entgegengesetzten Richtung drehen würde, die ursprüngliche als positiv angenommen, müsste

XXVI. $$\cos(-\alpha) = +\cos\alpha \text{ werden.}$$

3) Änderung der Tangente. Wenn $\alpha = 0°$, sind auch $b_1\,c_1$ und $h\,n$ gleich 0 und allgemein:

XXVII. $$\operatorname{tg} 2\,n\,\pi = 0.$$

Wird $\alpha = 90°$, so werden, weil der verlängerte Radius mit der Richtung der Tangente parallel ist, $b_1\,c_1$ und $h\,n = \infty$, daher auch $\operatorname{tg} 90° = \frac{\infty}{a\,b_1} = \frac{\infty}{r} = \infty$ und allgemein:

XXVIII. $$\operatorname{tg}\left(2\,n + \frac{1}{2}\right)\pi = \infty.$$

Vergrössert sich α bis zu 180°, so nimmt die Tangente ab bis 0 und wird zu gleicher Zeit, da der Devisor des Quotienten $a\,b_1$ oder $g\,l$ negativ wird, auch negativ, also:

XXIX. $$\operatorname{tg}(2\,n + 1)\,\pi = -0.$$

Von 180° bis 270° nimmt die Tangente wieder zu bis ∞, die Tangentenlinie und ihr Mass haben aber entgegengesetzte Richtung mit ihrer ursprünglichen, also $\operatorname{tg} 270° \; \frac{-\infty}{-a\,b_1} = \frac{-\infty}{-r} = +\infty$ und allgemein:

XXX. $$\operatorname{tg}\left(2\,n + \frac{3}{2}\right)\pi = +\infty.$$

Von 270° bis 360° nimmt die Tangente ab bis 0, die Tangentenlinie behält ihre negative Richtung, dagegen wird ihr Mass positiv, also ist auch die Tangente negativ.

Würde α negativ, so müsste auch die Tangente dasselbe Zeichen erhalten und

XXXI. $$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha \text{ werden.}$$

4) Anderung der Cotangente. Wenn $\alpha = 0,\ 2\,\pi,\ 4\,\pi \ldots\ 2\,n\,\pi$ wird, so ist die Cotangente ∞.

XXXII. $$\operatorname{cotg}(2\,n\,\pi) = \infty.$$

Für $\alpha = 90,\ \frac{\pi}{2},\ 2\,\pi + \frac{\pi}{2},\ 4\,\pi + \frac{\pi}{2}, \ldots \left(2\,n + \frac{1}{2}\right)\pi$ ist sie $= 0$.

XXXIII. $$\operatorname{cotg}\left(2\,n + \frac{1}{2}\right)\pi = 0.$$

Wenn α von 90° bis 180° zunimmt, so wird die Cotangentenlinie negativ und bei 180° π, $2\pi+\pi$, $4\pi+\pi$, ... $(2n+1)\pi$ wird sie $= -\infty$.

XXXIV. $$\cot g\,(2n+1)\pi = -\infty.$$

Von 180° an bis 270° nimmt die negative Cotangentenlinie zu bis 0, ihr Mass wird ebenfalls negativ, daher:

XXXV. $$\cot g\left(2n+\frac{2}{3}\right)\pi = +0.$$

Von 270° bis 360° wird die Cotangentenlinie wieder positiv, ihr Mass bleibt negativ, daher ist die Cotg. selbst negativ und, nach XXXII., für $360° = 0$.

Wenn α negativ wird, so ist:

XXXVI. $$\cot g\,(-\alpha) = -\cot g\,\alpha.$$

5) Änderung der Secante. Wenn α die Werte 0, 2π, 4π, ... $2n\pi$ annimmt, so ist $ac_1 = ab_1$ und $gn = hg$, daher die Secante = 1.

XXXVII. $$\sec 2n\pi = +1.$$

Wird α: $\frac{\pi}{2}$, $2\pi+\frac{\pi}{2}$, $4\pi+\frac{\pi}{2}$, ... $\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi$, so muss, da die Secantenlinie mit der Tangentenlinie parallel wird, die Secante $= \infty$ werden; also

XXXVIII. $$\sec\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi = \infty.$$

Nimmt α zu von 90° bis 180°, so nimmt die Secante ab und ihr Mass, also auch sie selbst, wird negativ. Für π, $2\pi+\pi$, $4\pi+\pi$, ... $(2n+1)\pi$ wird

XXXIX. $$\sec(2n+1)\pi = -1.$$

Wächst α von 180° bis 270°, so bleibt das Zeichen der Funktion aus dem oben genannten Grunde unverändert, sie selbst aber nimmt ab bis $-\infty$, was bei $\frac{3\pi}{2}$, $2\pi+\frac{3\pi}{2}$, ... $\left(2n+\frac{3}{2}\right)\pi$ stattfindet; also

XXXXI. $$\sec\left(2n+\frac{3}{2}\right)\pi = -\infty.$$

Von 270° wird das Mass der Secantenlinie wieder positiv, daher wird es die Secante selbst; sie erreicht bei 360°, nach XXXVII, die Grenze + 1.

Wird α negativ, so ist:

XXXXII. $$\sec(-\alpha) = +\sec\alpha.$$

6) Änderung der Cosecante. Hat α die Werte $0, 2\pi, 4\pi, \ldots 2n\pi$, so ist die Cosecante $= \frac{ac}{0} = \frac{gn}{0} = \infty$, also

XXXXIII. $$\operatorname{cosec}(2n\pi) = \infty.$$

Nimmt α die Werte an: $\frac{\pi}{2}, 2\pi + \frac{\pi}{2}, 4\pi + \frac{\pi}{2}, \ldots \left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi$, so nimmt die Cosecante bei dem Übergange zu dieser Grenze ab bis $+1$.

XXXXIV. $$\operatorname{cosec}\left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi = +1.$$

Wenn α von $\frac{\pi}{2}$ zu den Werten $\pi, 2\pi + \pi, 4\pi + \pi, \ldots (2n+1)\pi$ übergeht, so ändert sich die Cosecante von 1 bis $+\infty$, daher

XXXXV. $$\operatorname{cosec}(2n+1)\pi = \infty.$$

Geht α von π zu den Werten $\frac{3\pi}{2}, 2\pi + \frac{3\pi}{2}, \ldots \left(2n + \frac{3}{2}\right)\pi$ über, so wird das Mass der Cosecantenlinie und die Cosecante selbst negativ. Sie ändert sich von $-\infty$ bis -1, also:

XXXXVI. $$\operatorname{cosec}\left(2n + \frac{3}{2}\right)\pi = -1.$$

Von -1 an nimmt die Cosecante ab bis $-\infty$, nach XXXXIII, wenn α von 270° zu 360° übergeht. Daher auch, wenn α negativ wird:

XXXXVII. $$\operatorname{cosec}(-\alpha) = -\operatorname{cocec}\alpha.$$

§. 7

Der Sinus und Cosinus für die Summe zweier Winkel lassen sich leicht aus der Fig. 3 bestimmen. Es ist nämlich:

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{hd}{r} \text{ (I.)}, \quad hd = dg + hg = ef + hg, \text{ also}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{ef + gh}{r}.$$

Da aber $efc \sim cst$, so folgt:

$$ef : fc = st : tc \text{ oder}$$

$$ef : r.\cos\beta = r.\sin\alpha : r \text{ und}$$

$$ef = \frac{r^2.\sin\alpha.\cos\beta}{r} = r.\sin\alpha.\cos\beta.$$

Ebenso folgt, da $fgh \sim stc$

$$hg : hf = cs : ct$$

$$gh : r . \sin\beta = r . \cos\alpha : r$$

$$hg = \frac{r^2 \sin\beta . \cos\alpha}{r} = r \cos\alpha . \sin\beta; \text{ also ist}$$

XXXXVIII. $\sin(\alpha + \beta) = \dfrac{r . \sin\alpha . \cos\beta + r . \cos\alpha . \sin\beta}{r} =$

$$\sin\alpha . \cos\beta + \cos\alpha . \sin\beta.$$

In derselben Figur ist $\cos(\alpha + \beta) = \dfrac{cd}{r} = \dfrac{ec - ed}{r} = \dfrac{ec - fg}{r}$.

Nun ist aber $cef \sim cst$, also

$$ec : fc = cs : ct \text{ oder}$$

$$ec : r . \cos\beta = r . \cos\alpha : r \text{ und}$$

$$ec = \frac{r^2 . \cos\alpha . \cos\beta}{r} = r \cos\alpha . \cos\beta.$$

Weil auch $hfg \sim stc$, so

$$fg : fh = st : ct \text{ und}$$

$$fg : r \sin\beta = r . \sin\alpha : r, \text{ also}$$

$$fg = \frac{r^2 \sin\alpha . \sin\beta}{r} = r . \sin\alpha . \sin\beta \text{ und}$$

IL. $\cos(\alpha + \beta) = \dfrac{r . \cos\alpha . \cos\beta - r . \sin\alpha . \sin\beta}{r} = \cos\alpha . \cos\beta - \sin\alpha . \sin\beta.$

Aus den Gleichungen IIL. und IL. lassen sich auch die übrigen Funktionen für die Summe zweier Winkel ableiten.

Nach XII. ist $tg\,\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, wird statt α, $\alpha + \beta$ gesetzt:

$tg(\alpha + \beta) = \dfrac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)}$ und dafür die Werte aus IIL. u. IL. eingefügt

$tg(\alpha + \beta) = \dfrac{\sin\alpha . \cos\beta + \cos\alpha . \sin\beta}{\cos\alpha . \cos\beta - \sin\alpha . \sin\beta}$, wird Zähler und Nenner dieses Quotienten durch $\cos\alpha . \cos\beta$ geteilt, so erhält man unter Berücksichtigung der Gleichung XII.:

L. $$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\,.\operatorname{tg}\beta}.$$

Für die Cotangente erhält man auf dieselbe Weise aus Gleichung XVI.:

$\operatorname{cotg}(\alpha+\beta)=\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{\cos\alpha\,.\cos\beta-\sin\alpha\,.\sin\beta}{\sin\alpha\,.\cos\beta+\cos\alpha\,.\sin\beta}$, Zähler und Nenner durch $\sin\alpha\,.\sin\beta$ geteilt und Gleichung XVI. in Anwendung gebracht:

LI. $$\operatorname{cotg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{cotg}\alpha\,.\operatorname{cotg}\beta-1}{\operatorname{cotg}\alpha+\operatorname{cotg}\beta}.$$

Nach XIII. erhält man $\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}$, also auch $\sec(\alpha+\beta)=\frac{1}{\cos(\alpha+\beta)}$, und $\sec(\alpha+\beta)=\frac{1}{\cos\alpha.\cos\beta-\sin\alpha.\sin\beta}$, mit $\cos\alpha.\cos\beta$ geteilt in Zähler und Nenner:

LII. $$\sec(\alpha+\beta)=\frac{\sec\alpha\,.\sec\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha.\operatorname{tg}\beta}.$$

Aus XIV. folgt: $\operatorname{cosec}\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}$, daher auch $\operatorname{cosec}(\alpha+\beta)=\frac{1}{\sin(\alpha+\beta)}$ und $\operatorname{cosec}(\alpha+\beta)=\frac{1}{\sin\alpha\,.\cos\beta+\cos\alpha\,.\sin\beta}$, mit $\sin\alpha\,.\sin\beta$ dividirt:

LIII. $$\operatorname{cosec}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{cosec}\alpha\,.\operatorname{cosec}\beta}{\operatorname{cotg}\alpha+\operatorname{cotg}\beta}.$$

§. 8.

Aus den Gleichungen des §. 7 folgen, wenn in denselben $\alpha=\beta$ gesetzt wird, die Funktionen für doppelte Winkel. Es ist nämlich:

LIV. $$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\,.\cos\alpha.$$

LV. $$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha.$$

LVI. $$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

LVII. $$\operatorname{cotg}2\alpha=\frac{\operatorname{cotg}^2\alpha-1}{2\operatorname{cotg}\alpha}.$$

LVIII. $$\sec 2\alpha = \frac{\sec^2\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}.$$

LIX. $$\operatorname{cosec} 2\alpha = \frac{\operatorname{cosec}^2\alpha}{2\operatorname{cotg}^2\alpha}.$$

§. 9.

Durch die Gleichungen des §. 7 lassen sich auch die Funktionen für Winkel, die grösser sind als 90°, reduzieren, so z. B. die Funktionen für Winkel, die zwischen 90° und 180° lisgen; zu dieser Reduktion nimmt man $\beta = 90°$ und α als die zugehörige Ergänzung, so entstehen:

1) $\sin(\alpha + 90°) = \sin\alpha \,.\, \cos 90° + \cos\alpha \,.\, \sin 90°.$
$\sin(\alpha + 90°) = \cos\alpha.$ (XVIII. und XXIII.)

2) $\cos(\alpha + 90°) = \cos\alpha \,.\, \cos 90° - \sin\alpha \,.\, \sin 90°.$
$\cos(\alpha + 90°) = -\sin\alpha.$

3) $$\operatorname{tg}(\alpha + 90°) = \frac{\sin\alpha.\cos 90° + \cos\alpha.\sin 90°}{\cos\alpha.\cos 90° - \sin\alpha.\sin 90°} = -\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = -\operatorname{cotg}\alpha.$$

4) $$\operatorname{cotg}(\alpha + 90°) = \frac{\cos\alpha.\cos 90° - \sin\alpha.\sin 90°}{\sin\alpha.\cos 90° + \cos\alpha.\sin 90°} = -\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha.$$

5) $$\sec(\alpha + 90°) = \frac{1}{\cos\alpha.\cos 90° - \sin\alpha.\sin 90°} = -\frac{1}{\sin\alpha} = -\operatorname{cosec}\alpha.$$

6) $$\cos(\alpha + 90°) = \frac{1}{\sin\alpha.\cos 90° + \cos\alpha.\sin 90°} = \frac{1}{\cos\alpha} = \sec\alpha.$$

Auf ähnliche Weise werden die Funktionen abgeleitet für Winkel, die zwischen anderen Grenzen liegen.

§. 10.

Die Gleichungen des §. 7 dienen ferner zur Ableitung der Funktionen für die Summe aus drei verschiedenen Winkeln. Werden zu diesem Zwecke für β die beiden Winkel $\beta + \gamma$ gesetzt, so entsteht:

LX. $\sin(\alpha + \beta + \gamma) = \sin\alpha.\cos(\beta + \gamma) + \cos\alpha.\sin(\beta + \gamma)$ und nach IIL. und IL.
$= \sin\alpha.(\cos\beta \,.\, \cos\gamma - \sin\beta \,.\, \sin\gamma) +$
$\cos\alpha \,.\, (\sin\beta \,.\, \cos\gamma + \cos\beta \,.\, \sin\gamma)$ oder

$$= \sin\alpha . \cos\beta . \cos\gamma - \sin\alpha . \sin\beta . \sin\gamma$$
$$\sin\beta . \cos\alpha . \cos\gamma$$
$$\sin\gamma . \cos\alpha . \cos\beta.$$

LXI. $\cos(\alpha+\beta+\gamma) = \cos\alpha . \cos(\beta+\gamma) - \sin\alpha . \sin(\beta+\gamma).$
$$= \cos\alpha . (\cos\beta . \cos\gamma - \sin\beta . \sin\gamma) -$$
$$\sin\alpha(\sin\beta . \cos\gamma + \cos\beta . \sin\gamma)$$
$$= \cos\alpha . \cos\beta . \cos\gamma - \cos\alpha . \sin\beta . \sin\gamma$$
$$- \cos\beta . \sin\alpha . \sin\gamma$$
$$- \cos\gamma . \sin\alpha . \sin\beta.$$

LXII. $\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}(\beta+\gamma)}{1 - \operatorname{tg}\alpha . \operatorname{tg}(\beta+\gamma)}$
$$= \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\alpha . \operatorname{tg}\beta . \operatorname{tg}\gamma}{1 - \operatorname{tg}\alpha . \operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha . \operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\beta . \operatorname{tg}\gamma}.$$

LXIII. $\operatorname{cotg}.(\alpha+\beta+\gamma) = \dfrac{\operatorname{cotg}\alpha . \operatorname{cotg}(\beta+\gamma) - 1}{\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}(\beta+\gamma)}.$
$$= \frac{\operatorname{cotg}\alpha . \operatorname{cotg}\beta . \operatorname{cotg}\gamma - \operatorname{cotg}\alpha - \operatorname{cotg}\beta - \operatorname{cotg}\gamma}{\operatorname{cotg}\alpha . \operatorname{cotg}\beta + \operatorname{cotg}\alpha . \operatorname{cotg}\gamma + \operatorname{cotg}\beta . \operatorname{cotg}\gamma - 1}.$$

LXIV. $\sec(\alpha+\beta+\gamma) = \dfrac{\sec\alpha . \sec\beta . \sec\gamma}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha . \operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\beta . \operatorname{tg}\gamma}.$

LXV. $\operatorname{cosec}(\alpha+\beta+\gamma) = \dfrac{\operatorname{cosec}\alpha . \operatorname{cosec}\beta . \operatorname{cosec}\gamma}{\operatorname{cotg}\alpha . \operatorname{cotg}\beta + \operatorname{cotg}\alpha . \operatorname{cotg}\gamma + \operatorname{cotg}\beta . \operatorname{cotg}\gamma - 1}.$

Auf diese Art lassen sich auch die Funktionen gewinnen für die Summe aus vier und mehr Winkeln. In den Entwickelungen selbst lassen sich Gruppen von Kombinationen erkennen.

§. 11.

Wird in den Gleichungen des §. 10 $\alpha = \beta = \gamma$ gesetzt, so entstehen die Funktionen für dreifache Winkel, nämlich:

1) $\sin 3\alpha = 3 . \sin\alpha . \cos^2\alpha - \sin^3\alpha.$
2) $\cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha . \sin^2\alpha.$
3) $\operatorname{tg} 3\alpha = (3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha) : (1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha).$
4) $\operatorname{cotg} 3\alpha = (\operatorname{cotg}^3\alpha - 3\operatorname{cotg}\alpha) : (3\operatorname{cotg}^2\alpha - 1).$
5) $\sec 3\alpha = \sec^3\alpha : (1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha).$
6) $\operatorname{cosec} 3\alpha = \operatorname{cosec}^3\alpha : (3\operatorname{cotg}^2\alpha - 1).$

§. 12.

Wenn in den Gleichungen des §. 7 $-\beta$ gesetzt wird statt $+\beta$, so erhält man die Funktionen für die Differenz zweier Winkel:

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha.\cos(-\beta)+\cos\alpha.\sin(-\beta)$ und nach XXI. und XXVI.

LXVI. $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha.\cos\beta-\cos\alpha.\sin\beta.$

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha.\cos(-\beta)-\sin\alpha.\sin(-\beta)$, (XXI. u. XXVI.

LXVII. $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha.\cos\beta+\sin\alpha.\sin\beta.$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}(-\beta)}{1-\operatorname{tg}\alpha.\operatorname{tg}(-\beta)}.\quad \text{(XXXI.)}$$

LXVIII. $$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha.\operatorname{tg}\beta}.$$

$$\operatorname{cotg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{cotg}\alpha.\operatorname{cotg}(-\beta)-1}{\operatorname{cotg}\alpha+\operatorname{cotg}(-\beta)}.\quad \text{(XXXVI.)}$$

LXIX. $$\operatorname{cotg}(\alpha-\beta)=\frac{1+\operatorname{cotg}\alpha.\operatorname{cotg}\beta}{\operatorname{cotg}\beta-\operatorname{cotg}\alpha}.$$

$$\sec(\alpha-\beta)=\frac{\sec\alpha.\sec(-\beta)}{1-\operatorname{tg}\alpha.\operatorname{tg}(-\beta)}.\quad \text{(XXXXII. u. XXXI.)}$$

LXX. $$\sec(\alpha-\beta)=\frac{\sec\alpha.\sec\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha.\operatorname{tg}\beta}.$$

$$\operatorname{cosec}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{cosec}\alpha.\operatorname{cosec}(-\beta)}{\operatorname{cotg}\alpha+\operatorname{cotg}(-\beta)}.\quad \text{(XXXVI. u. XXXXVII.)}$$

LXXI. $$\operatorname{cosec}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{cosec}\alpha.\operatorname{cosec}\beta}{\operatorname{cotg}\beta-\operatorname{cotg}\alpha}.$$

§. 13.

Wenn es nötig ist, die Summen oder Differenzen aus Funktionen in Produkte zu verwandeln, so lässt sich dieses durch die Gleichungen des §. 7 und §. 12 ausführen, daraus hat man nämlich durch Addition

von IIL. u. LXVI. 1) $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha.\cos\beta,$

von IL. u. LXVII. 2) $\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha.\cos\beta.$

Durch Subtraktion

von IIL. u. LXVI. 3) $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\cos\alpha.\sin\beta$ und

von IL. u. LXVII. 4) $-\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\sin\alpha.\sin\beta.$

Ist $\alpha+\beta=x$ und $\alpha-\beta=y$, so ist $\alpha=\frac{x+y}{2}$ und $\beta=\frac{x-y}{2}$; diese in die vorhergehenden Gleichungen eingeführt:

$$5)\ \sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\,.\,\cos\frac{x-y}{2}$$

$$6)\ \cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\,.\,\cos\frac{x-y}{2}$$

$$7)\ \sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\,.\,\sin\frac{x-y}{2}$$

$$8)\ -\cos x + \cos y = 2\sin\frac{x+y}{2}\,.\,\sin\frac{x-y}{2}.$$

Durch Division

von 5 und 6 entsteht: $9)\ \dfrac{\sin x + \sin y}{\cos x + \cos y} = \operatorname{tg}\dfrac{x+y}{2},$

von 5 und 8 entsteht: $10)\ \dfrac{\sin x + \sin y}{-\cos x + \cos y} = \operatorname{cotg}\dfrac{x-y}{2}.$

von 7 und 6 entsteht: $11)\ \dfrac{\sin x - \sin y}{\cos x + \cos y} = \operatorname{tg}\dfrac{x-y}{2},$

von 7 und 8 entsteht: $12)\ \dfrac{\sin x - \sin y}{\cos y - \cos x} = \operatorname{cotg}\dfrac{x+y}{2}.$

Für die Summe oder Differenz zweier Tangenten erhält man:

$$13)\ \operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \pm \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\sin\alpha.\cos\beta \pm \cos\alpha.\sin\beta}{\cos\alpha.\cos\beta} = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\,.\,\cos\beta},$$

Ebenso für die Cotangenten, die Secanten und Cosecanten:

$$14)\ \operatorname{cotg}\alpha \pm \operatorname{cotg}\beta = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \pm \frac{\cos\beta}{\sin\beta} = \frac{\sin\beta.\cos\alpha \pm \cos\beta.\sin\alpha}{\sin\alpha.\sin\beta} = \frac{\sin(\beta\pm\alpha)}{\sin\alpha.\sin\beta},$$

$$15)\ \sec\alpha + \sec\beta = \frac{1}{\cos\alpha} + \frac{1}{\cos\beta} = \frac{\cos\beta + \cos\alpha}{\cos\alpha.\cos\beta} = \frac{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\,.\,\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\alpha\,.\,\cos\beta}$$

(nach Gl. 6),

$$16)\ \sec\alpha - \sec\beta = \frac{1}{\cos\alpha} - \frac{1}{\cos\beta} = \frac{\cos\beta - \cos\alpha}{\cos\alpha.\cos\beta} = \frac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}.\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\alpha.\cos\beta}$$

(nach Gl. 8),

$$17)\ \operatorname{cosec}\alpha + \operatorname{cosec}\beta = \frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\beta} = \frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\cos\alpha.\cos\beta} = \frac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}.\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\alpha\,.\,\sin\beta}$$

(Gl. 5).

$$18)\ \operatorname{cosec}\alpha-\operatorname{cosec}\beta=\frac{1}{\sin\alpha}-\frac{1}{\sin\beta}=\frac{\sin\beta-\sin\alpha}{\sin\alpha.\sin\beta}=\frac{2\cos\frac{\beta+\alpha}{2}.\sin\frac{\beta-\alpha}{2}}{\sin\alpha.\sin\beta}$$

(Gl. 7).

§. 14.

Mittels der Gleichungen des §. 8 und §. 5 können die Funktionen für halbe Winkel gefunden werden, nach ersterem ist:

$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$ und nach IX.

$\cos^2 a+\sin^2\alpha=1$, also

$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$ und

$\cos 2\alpha=1-\sin^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha$ oder

$2\sin^2\alpha=1-\cos 2\alpha$

$\sin\alpha=\pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}$ und wenn $\frac{\alpha}{2}$ gesetzt wird statt α:

LXXII. $\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$. Auf ähnliche Weise entsteht

LXXIII. $\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$ und für die übrigen Funktionen:

LXXIV. $$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{1-\cos\alpha}}{\sqrt{1+\cos\alpha}}=\frac{\sqrt{1-\cos\alpha}\sqrt{1+\cos\alpha}}{\sqrt{1+\cos\alpha}\sqrt{1+\cos\alpha}}=$$

$$\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{1+\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha},$$

LXXV. $$\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{1+\cos\alpha}}{\sqrt{1-\cos\alpha}}=\frac{\sqrt{1+\cos\alpha}\sqrt{1-\cos\alpha}}{\sqrt{1-\cos\alpha}\sqrt{1-\cos\alpha}}=$$

$$\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{1-\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha},$$

LXXVI. $\sec\frac{\alpha}{2}=\pm\frac{1}{\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+\cos\alpha}}=\frac{\sqrt{2(1-\cos\alpha)}}{\sin\alpha}$ und

LXXVII. $\operatorname{cosec}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-\cos\alpha}} = \frac{\sqrt{2(1+\cos\alpha)}}{\sin\alpha}$.

§. 15.

Wird die imaginäre Grösse $\sqrt{-1}$ mit i bezeichnet und mit dem Sinus verschiedener Winkel desselben Kreises multiplizirt, so lässt sich durch die imaginären Ausdrücke: $r\cos\alpha + i\,r\sin\alpha$, $r\cos\beta + i\,r\sin\beta$, $r\cos\gamma + i\,r\sin\gamma$, . . . unter Berücksichtigung des §. 7 und §. 10 der Satz gewinnen:

$$(r\,[\cos\alpha + i\sin\alpha])^n = r^n\,(\cos n\,\alpha + i\sin n\,\alpha).$$

Es ist nämlich:

$$r\,(\cos\alpha + i\sin\alpha)\,.\,r\,(\cos\beta + i\sin\beta) = r^2\,(\cos\alpha\,.\,\cos\beta + i\,[\sin\alpha\,.\,\cos\beta + \cos\alpha\,.\,\sin\beta] - \sin\alpha\,.\,\sin\beta)$$

oder nach IIL. u. IL.

$$r\,(\cos\alpha + i\sin\alpha)\,.\,r\,(\cos\beta + i\sin\beta) = r^2\,(\cos\,[a + \beta] + i\sin\,[\alpha + \beta]).$$

Ferner: $r\,(\cos\alpha + i\sin\alpha)\,.\,r\,(\cos\beta + i\sin\beta)\,.\,r\,(\cos\gamma + i\sin\gamma) =$

$$r^3\left[\begin{array}{l}\cos\alpha.\cos\beta.\cos\gamma - \cos\gamma.\sin\alpha.\sin\beta \\ -\cos\beta.\sin\alpha.\sin\gamma \\ -\cos\alpha.\sin\beta.\sin\gamma\end{array} + i\left\{\begin{array}{l}\sin\gamma.\cos\alpha.\cos\beta - \sin\alpha.\sin\beta\sin\gamma \\ +\sin\beta.\cos\alpha.\cos\gamma \\ +\sin\alpha.\cos\beta.\cos\gamma\end{array}\right\}\right]$$

und nach LX. u. LXI.:

$$r.(\cos\alpha + i\sin\alpha).r(\cos\beta + i\sin\beta).r(\cos\gamma + i\sin\gamma) = r^3.(\cos.[\alpha + \beta + \gamma] + i\sin\,[\alpha + \beta + \gamma]).$$

Auf diese Art weiter geschlossen, ist allgemein für n verschiedene Winkel:

$$r\,.\cos\alpha + i\sin\alpha)\,.\,r\,.\,(\cos\beta + i\sin\beta)\,.\,r\,.\,(\cos\gamma + i\sin\gamma)\;.\,.\,.\,.\,. = r^n\,(\cos\,[\alpha + \beta + \gamma + \,.\,.\,.\,.] + i\,.\sin\,[\alpha + \beta + \gamma + \,.\,.\,.\,.])$$

Für den Fall, dass $\alpha = \beta = \gamma = \ldots$ folgt

$$r\,(\cos\alpha + i\sin\alpha)\,.\,r\,(\cos\alpha + i\sin\alpha)\,.\,r\,.\,(\cos\alpha + i\sin\alpha)\;.\,.\,.\,. = r^n\,(\cos\,[\alpha + \alpha + \alpha\,.\,.\,.] + i\,.\sin\,[a + \alpha + \alpha\,.\,.\,.])$$ oder

LXXVIII. $r^n\,.\,(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = r^n\,(\cos\,[n\,\alpha] + i\sin\,[n\,\alpha])$. (Moivres Lehrsatz.)

§. 16.

Kennt man $\cos\alpha$ und $\sin\alpha$, so lässt sich durch den Satz LXXVIII. auch $\cos n\,\alpha$ und $\sin n\,.\,\alpha$ finden. Nach dem binomischen Lehrsatze*) ist:

---

*) Entwicklungsmethoden des Binomialtheorems von F. X. Lehmann. Constanz bei Meck 1852.

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos^n\alpha + \frac{n\,.\,i}{1}\cos^{n-1}\alpha\,.\,\sin\alpha + i^2\,.\,\frac{n\,(n-1)}{1\,.\,2}\cos^{n-2}\alpha\sin^2\alpha +$$

$$i^3\frac{(n\,[n-1]\,[n-2])}{1\,.\,2\,.\,3}\cos^{n-3}\alpha\,.\,\sin^3 + i^4\,.\,\frac{n\,(n-1)(n-2)\,(n-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\cos^{n-4}\alpha\,.\sin^4\alpha +$$

$$\ldots\ldots = \cos n\,\alpha + i\sin n\,\alpha.$$

Nun ist aber $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = +1$, $i^5 = +i$, . . .

Werden diese Gleichungen berücksichtigt und die Glieder der Reihe, welche mit der Imaginären behaftet bleiben, zusammengestellt, so ist:

$$\cos n\,\alpha + i\sin n\,\alpha = \cos^n\alpha - \frac{n\,(n-1)}{1\,.\,2}\cos^{n-2}\alpha\,.\,\sin^2\alpha +$$

$$\frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\cos^{n-4}\alpha\,.\,\sin^4\alpha - + \ldots\; i\left(\frac{n}{1}\,.\cos^{n-1}\alpha\,.\,\sin\alpha - \right.$$

$$\left.\frac{n\,(n-1)\,(n-2}{1\,.\,2\,.\,3}\cos^{n-3}\alpha\,.\,\sin^3\alpha + - \ldots\right) \text{ und hieraus}$$

LXXIX. $$\cos n\,\alpha = \cos^n\alpha - \frac{n\,(n-1)}{1\,.\,2}\cos^{n-2}\alpha\,.\,\sin^2\alpha\,. +$$

$$\frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\cos^{n-4}\alpha\,.\,\sin^4\alpha - + \ldots.$$

LXXX. $$\sin n\,\alpha = \frac{n}{1}\cos^{n-1}\alpha\sin\alpha - \frac{n\,(n-1)\,(n-2}{1\,.\,2\,.\,3}\cos^{n-3}\alpha.\sin^3\alpha + - \ldots$$

§. 17.

Die beiden eben gefundenen Gleichungeu dienen ferner zur Bestimmung des Sinus und Cosinus eines Winkels; werden sie zu diesem Zwecke durch $\cos^n\alpha$ geteilt, so verwandeln sie sich unter Berücksichtigung des Satzes XII. in:

1) $$\frac{\cos n\,\alpha}{\cos^n\alpha} = 1 - \frac{n\,(n-1)}{1\,.\,2}\operatorname{tg}^2\alpha + \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\operatorname{tg}^4\alpha - + \ldots$$

2) $$\frac{\sin n\,\alpha}{\cos^n\alpha} = \frac{n}{1}\,.\operatorname{tg}\alpha - \frac{n(n-1)\,(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\operatorname{tg}^3 + - \ldots.$$

Wird $n\,\alpha = x$ angenommen, also $\alpha = \frac{x}{n}$, $n = \frac{x}{\alpha}$, so ist

4) $$\frac{\cos x}{\cos^n\frac{x}{n}} = 1 - \frac{x\,(x-\alpha)}{1\,.\,2}\,\frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{\alpha^2} + \frac{x(x-\alpha)(x-2\,\alpha)\,(x-3\,\alpha)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\,\frac{\operatorname{tg}^4\alpha}{\alpha^4} - + \ldots.$$

5) $$\frac{\cos x}{\cos^n\frac{x}{n}} = \frac{x}{1}\,.\,\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\alpha} - \frac{x\,(x-\alpha)\,(x-2\,\alpha)}{1\,.\,2\,.\,3}\,\frac{\operatorname{tg}^3\alpha}{\alpha^3} + - \ldots.$$

Wenn nun n unbeschränkt zunimmt, so muss $\frac{x}{n}$, also auch α, unbeschränkt abnehmen, vorausgesetzt, dass x endlich ist; für Winkel, welche der 0 sehr nahe kommen, kann aber der Cosinus als 1 und die Tangente dem zugehörigen Bogen als gleich angenommen werden; daher:

LXXXI. $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + - \ldots$$

LXXXII. $$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - + \ldots$$

Ist $x = \frac{m.\pi}{2}$, π als Verhältniszahl der Peripherie zum Radius angesehen, so ist:

LXXXIII. $$\cos\left(\frac{m\,\pi}{2}\right) = 1 - m^2 . 1{,}2337006 + m^4 . 0{,}2536695 - m^6\, 0{,}02080635 + m^8 . 0{,}0009193 - m^{10} . 0{,}0000252 + m^{12} . 9{,}0000004 - \ldots$$

LXXXIV. $$\sin\left(\frac{m\,\pi}{2}\right) = m . 1{,}5707963 - m^3 . 0{,}6459641 + m^5\, 0{,}0796926 - m^7 . 0{,}0046818 + m^9 . 0001604 - m^{11} . 0{,}0000036 + \ldots$$

§. 18.

Wenn e die Basis der natürlichen Logarithmen bedeutet, so ist bekanntlich:

$$e^y = 1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{1.2} + \frac{y^3}{1.2.3} + \ldots$$

Wird in dieser Gleichung einmal $y = + i x$, und dann $y = - i x$ angenommen, wenn $i = \sqrt{-1}$, so ist:

1) $$e^{ix} = 1 + \frac{i x}{1} - \frac{x^2}{1.2} - \frac{i x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{i x^5}{1.2.3.4.5} - - \ldots = \cos x + i \sin x.$$

2) $$e^{-ix} = 1 - \frac{i x}{1} - \frac{x^2}{1.2} + \frac{i x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{i x^5}{1.2.3.4.5} - + \ldots = \cos x - i \sin x.$$

Durch Addition dieser Gleichungen entsteht:

$$e^{ix} + e^{-ix} = 2 - \frac{2 x^2}{1.2} + \frac{2 x^4}{1.2.3.4} - + = 2 \cos x, \text{ und}$$

LXXXV. $$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

Durch Subtraktion derselben Gleichungen:

$$e^{ix} - e^{-ix} = \frac{2ix}{1} - \frac{2ix^3}{1.2.3} + \frac{2ix^5}{1.2.3.4.5} - + \ldots = 2i\sin x \text{ oder}$$

LXXXVI. $$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Die Gleichungen LXXXV. und LXXXVI. können zur Ableitung vieler Sätze benützt werden.

§. 19.

Mit Hilfe der bis jetzt gefundenen Sätze und einiger aus der Lehre vom Kreise lassen sich die Funktionen für bestimmte Winkel berechnen. Dazu wird der Radius des Kreises, welchen die beweglich gedachte Seite des Winkels beschreibt, als Einheit genommen. Sollen aber die, für bestimmte Winkel so gewonnenen Zahlenwerte logarithmiert werden, so wird, damit die Logarithmen positiv bleiben, der Radius als 10000.000000 genommen. Nimmt man daher einen trigonometrischen Logarithmus für den Radius von 10000.000000 in eine Rechnung für den Radius 1, so hat man die Charakteristik 10 von ihm abzuziehen und im entgegengesetzten Falle 10 zu addieren. Die Zahlenwerte der Funktionen und ihre Logarithmen lassen sich nach und nach auf folgende Weise ableiten:

Wenn (Fig. 2) der Winkel $\alpha = 45°$ wird, so muss auch $ml = lg$ werden; es ist aber $\frac{ml}{1} = \sin 45 = lg$; ferner $ml^2 + lg^2 = mg^2$ oder

$$\sin^2 45° + \sin^2 45° = 1.$$

LXXXVII. $$2\sin^2 45° = 1.$$

$$\sin 45° = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\lg \sin 45° = \frac{\lg 0{,}5}{2} + 10 = 0{,}8494850 - 1 + 10$$

$$\log \sin 45° = 9{,}8494850.$$

Weil $ml = lg$, so muss auch

LXXXVIII. $$\cos 45° = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\log \cos 45° = 9{,}8494850.$$

Mit Hilfe der Sätze LXXII. und LXXIII. wird gefunden:

1) $\sin 22°30'$, $\sin 11°11'$, $\sin 5°37'30''$, $\sin 2°48'45''$, $\sin 1°24'22{,}5''$, $\sin 0°42'11{,}25''$, $\sin 0°21'5{,}625''$, $\sin 0°10'32{,}8125''$, $\sin 0°5'16{,}4''$, $\sin 0°2'38{,}2''$, $\sin 0°1'19{,}1''$, $\sin 0°0'39{,}5''$, $\sin 0°0'19{,}7''$, $\sin 0°0'9{,}8''$, $\sin 0°0'49''$, $\sin 0°0'2{,}4''$ $\sin 0°0'1{,}2''$.

2) Der Cosinus für dieselben Winkel.

Die Sätze des §. 7, §. 11, §. 12, § 15 geben Sinus und Cosinus für andere Winkel.

Wenn $\alpha = 30°$ wird, so muss $\mathrm{l\,m} = \frac{\mathrm{m\,g}}{2}$, also

LXXXIX. $$\sin 30° = \frac{1}{2}$$

$$\lg \sin 30° = \lg 0{,}5 + 10 = 9{,}6989700.$$

Nach IX. ist:

LXXXX. $$\cos 30° = \pm \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\lg \cos 30° = \frac{\lg 3}{2} - \lg 2 + 10 = 9{,}9375306.$$

Aus beiden Sätzen lassen sich Sinus und Cosinus für eine ähnliche Reihe von Winkeln finden, wie für sin 45° und cos 45°.

Ist $\alpha = 18°$, so wird $\mathrm{l\,m}$ die Hälfte der Zehneckseite z, für diese findet aber die Proportion statt:

$$r : z = z : r - z \text{ oder}$$

$$1 : z = z : 1 - z$$

$$z^2 + z = 1$$

$$z^2 + z + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

$$z = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}, \text{ daher}$$

LXXXXI. $$\sin 18° = \frac{\sqrt{5} - 1}{2 \,.\, 2} \text{ und}$$

LXXXXII. $$\cos 18° = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}.$$

Sind die Bogen sehr klein, betragen sie nur Teile einer Sekunde oder einzelne Sekunden, so kann der Sinus gleich dem Bogen angenommen werden; man erhält dann:

$$\text{LXXXXIII.}\quad \sin 1'' = \operatorname{arc} 1'' = \frac{2\pi}{360 \,.\, 60 \,.\, 60} \, 0{,}0000048481368 \ldots$$

Durch Benützung der Sätze des §. 5 können mittels der Werte des Sinus die der übrigen Funktionen gewonnen werden.

Die Logarithmen der Funktionen sind für Winkel 0° bis 90° in den trigonometrischen Tafeln zusammengestellt. Wie die Funktionen für andere Winkel gefunden werden, ist in §. 9 angegeben.

§. 20.

Auflösung des rechtwinkligen Dreieckes.

Die Teile eines rechtwinkligen Dreieckes lassen sich durch folgende Sätze bestimmen:

LXXXXIV. Die Kathete ist gleich dem Produkte aus dem Sinus des gegenüberliegenden Winkels und der Hypotenuse.

Nach I. ist nämlich:

$$\frac{b_1 c_1}{a c_1} = \sin \alpha, \text{ also}$$

$$b_1 c_1 = a c_1 \sin \alpha, \text{ ebenso}$$

$$m\, l = r \,.\, \sin \alpha,$$

oder, nach demselben Satze I.,

$$\frac{b_1 a}{c_1 a} = \sin \delta$$

$$b_1 a = c_1 a \,.\, \sin \delta \text{ und}$$

$$g l = r \,.\, \sin \delta.$$

Z. B. für $a c_1 = 15\,\text{m}$, $\alpha = 36^\circ 52' 10''$ ist

$$\begin{aligned} b_1 c_1 &= 15 \,.\, \sin 36^\circ 52' 10'' \\ b_1 c_1 &= N(\lg 15 + \lg \sin 36^\circ 52' 10'' - 10) \\ &= N(1{,}1760913 + 9{,}7781467 - 10) \\ &= N(0{,}9542380) = 8{,}9999 \ldots \text{ m.} \end{aligned}$$

LXXXXV. Die Kathete ist gleich dem Produkte aus dem Cosinus des anliegenden Winkels und der Hypotenuse.

Denn nach Satz IV. ist

$$\frac{a\,b_1}{a\,c_1} = \cos\alpha.$$

$$a\,b_1 = a\,c_1 \,.\, \cos\alpha \text{ und}$$

$$\frac{g\,l}{r} = \cos\alpha.$$

$$g\,l = r \,.\, \cos\alpha;$$

Oder:

$$c_1\,b_1 = a\,c_1 \,.\, \cos\delta \text{ und}$$

$$l\,m = r \,.\, \cos\delta.$$

Z. B. $a\,b_1 = 15$ m, $\alpha = 30^\circ\,52'\,10''$

$$\begin{aligned} a\,b_1 &= N\,(\lg 15 + \lg\cos 36^\circ\,52'\,10'' - 10) \\ &= N\,(1{,}1760913 + 9{,}9030926 - 10) \\ &= N\,(1{,}0791839) = 12{,}0001 \ldots \text{m}. \end{aligned}$$

LXXXXVI. Die Kathete ist gleich dem Produkte aus der Tangente des gegenüberliegenden Winkels und der andern Kathete.

Aus II. ist:

$$b_1\,c_1 = a\,b_1\,\mathrm{tg}\,\alpha,$$

$$n\,h = r \,.\, \mathrm{tg}\,\alpha, \text{ oder}$$

$$a\,b_1 = c_1\,b_1\,\mathrm{tg}\,\delta,$$

$$h\,g = h\,n \,.\, \mathrm{tg}\,\delta.$$

Z. B. $a\,b_1 = 12{,}0001 \,.\, \text{m}, \alpha = 36^\circ 52' 10''$

$$\begin{aligned} b_1\,c_1 &= N\,(\lg 12{,}0001 \ldots + \lg\,\mathrm{tg}\,36^\circ 52' 10'' - 10) \\ &= N\,(1{,}0791839 + 9{,}8750541 - 10) \\ &= N\,(0{,}9542380) = 8{,}9999. \end{aligned}$$

LXXXXVII. Die Kathete ist gleich dem Produkte aus der Cotangente des anliegenden Winkels und der andern Kathete.

Nach V. ist:

$$a\,b_1 = b_1\,c_1\,\mathrm{cotg}\,\alpha \text{ und}$$

$$h\,g = h\,n \,.\, \mathrm{cotg}\,\alpha, \text{ oder}$$

$$b_1\,c_1 = a\,b_1\,\mathrm{cotg}\,\delta \text{ und}$$

$$h\,n = h\,g \,.\, \mathrm{cotg}\,\delta.$$

Ebenso folgt

LXXXXVIII. Die Hypotenuse ist gleich dem Quotienten aus einer Kathete und dem Sinus des ihr gegenüberliegenden Winkels.

LXXXXIX. Die Hypotenuse ist gleich dem Quotienten aus einer Kathete und dem Cosius des der Kathete anliegenden Winkels.

Zur Bestimmung der Winkel aus zwei gegebenen Seiten können die Sätze I. bis VI. unmittelbar benützt werden.

Z. B. von $a c_1 = 15$ m, $b_1 c_1 = 8{,}9999 \ldots$ m, wie gross ist α?

Nach I. ist:

$$\sin \alpha = \frac{b_1 c_1}{a c_1}$$

$$\lg \sin \alpha = \lg b_1 c_1 - \lg a c_1 + 10 = \lg 8{,}9999 \ldots - \lg 15 + 10$$

$$\lg \sin \alpha = 0{,}9542380 - 1{,}1760913 + 10 = 9{,}7781467$$

$$\alpha = 36^\circ 52' 10''.$$

§. 21.

Auflösung des schiefwinkligen Dreieckes.

Die schiefwinkligen Dreiecke lassen sich, wenn bestimmte Teile derselben gegeben sind, im allgemeinen dadurch auflösen, dass sie durch Höhenlinien in rechtwinklige zerlegt werden.

So ist im Dreiecke abc (Fig. 4), weil dasselbe durch die Höhenlinie h in die rechtwinkligen ahm und hbc zerlegt ist, nach

LXXXXIV. $h = a . \sin \gamma$ und $h = c . \sin \alpha$, also

$a . \sin \gamma = c . \sin \alpha$ oder

$a : c = \sin \alpha : \sin \gamma$, ebenso ist auch

$a : b = \sin \alpha : \sin \beta$ und

$b : c = \sin \beta : \sin \gamma$; d. h.

C. Im schiefwinkligen Dreiecke verhalten sich zwei Seiten wie die Sinus der gegenüberliegenden Winkel.

Ist z. B. $\alpha = 36^\circ 52' 10''$, $\gamma = 63^\circ 7' 50''$, $a = 15$ m, wie gross ist c?

$$a : c = \sin \alpha : \sin \gamma$$

$$c = \frac{a . \sin \gamma}{\sin \alpha}$$

$$c = N(\lg 15 + \lg\sin 63^\circ 7' 50 - \lg\sin 36^\circ 52' 10)$$
$$c = N(1{,}1760913 + 9{,}9503838 - 9{,}7781467)$$
$$c = N(1{,}3483284) = 22{,}3012\ldots$$

In dem Dreiecke a h m (Fig. 4) ist:

$$a^2 = m^2 + h^2,\quad m = b - n = b - c.\cos\alpha,\quad h = c.\sin\alpha$$
$$a^2 = (b - c.\cos\alpha)^2 + c^2\sin^2\alpha$$
$$= b^2 - 2bc.\cos\alpha + c^2\cos^2\alpha + c^2.\sin^2\alpha$$
$$= b^2 + c^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) - 2bc.\cos\alpha$$ und nach IX.

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$; auf demselben Wege erhält man auch:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos\gamma;$$ d. h.

CI. Im schiefwinkligen Dreiecke ist das Quadrat einer Seite gleich der Summe der Quadrate der beiden andern, weniger dem doppelten Produkte aus diesen Seiten und dem Cosinus des von ihnen gebildeten Winkels.

Die Form dieses Satzes ist zum Logarithmieren nicht geeignet, sie kann aber mit Hilfe früherer Sätze leicht günstiger eingerichtet werden. Soll z. B. ein Winkel, etwa α, aus den drei Seiten des Dreieckes bestimmt werden, so erhält man zunächst:

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$ daher auch

$$1 + \cos\alpha = 1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{b^2 + 2bc + c^2 - a^2}{2bc}$$ oder

$$1 + \cos\alpha = \frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc};$$

aus §. 14 erhält man aber $1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$, daher

$$2\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}$$ oder

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{(a+b+c)(b+c-a)}{2bc}\right)}.$$

Wären z. B. die Seiten: a=2, b=3, c=4, so wäre:

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{45}{24}}=0{,}5\ .\ \sqrt{1{,}875}$$

$$\lg\cos\frac{\alpha}{2}=\lg 0{,}5+\frac{\lg 1{,}875}{2}+10=9{,}8354716$$

$$\frac{\alpha}{2}=46^\circ 11' 29''$$

$$\alpha=92^\circ 22' 58''.$$

Ein anderer Satz lässt sich aus c ableiten, darnach ist:

$$a:c=\sin\alpha:\sin\gamma \text{ oder}$$

$$(a+c):(a-c)=(\sin\alpha+\sin\gamma):(\sin\alpha-\sin\gamma),$$

$$\text{ist } \alpha=x+z,\ \gamma=x-z$$

$$(a+c):(a-c)=(\sin[x+z]+\sin[x-z]):(\sin[x+z]-\sin[x-z])$$

oder nach IIL. und IL.

$$(a+c):(a-c)=(\sin x.\cos z+\cos x.\sin z+\sin x.\cos z-\cos x.\sin z):$$
$$(\sin x.\cos z+\cos x.\sin z-[\sin x.\cos z\mp\cos x.\sin z])$$

$$\frac{a+c}{a-c}=\frac{2\sin x.\cos z}{2\cos x.\sin z}=\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} z}$$

Aus der Annahme ist $x=\frac{\alpha+\gamma}{2}$, $z=\frac{\alpha-\gamma}{2}$, daher

$$(a+c):(a-c)=\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right):\operatorname{tg}\frac{\alpha-\gamma}{2};\ \text{d. h.}$$

CII In jedem Dreiecke verhält sich die Summe zweier Seiten zu der Differenz dieser Seiten, wie die Tangente aus der halben Summe der zwei, diesen Seiten gegenüberliegenden Winkeln zur halben Differenz dieser Winkel.

Wenn z. B.

$$a+c=864,\ a-c=170,\ \frac{\alpha+\gamma}{2}=63^\circ 25' 40'',\ \text{so ist}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha-\gamma}{2}=\frac{170\operatorname{tg}63^\circ 25' 40''}{864}\ \text{und}$$

$$\lg \operatorname{tg} \frac{\alpha-\gamma}{2} = \lg 170 + \lg \operatorname{tg} 60^0 25' 40'' - \lg 864;$$

$$\lg \operatorname{tg} \frac{\alpha-\gamma}{2} = 2,2304489 + 10,3008941 - 2,9065137$$

$$\lg \operatorname{tg} \frac{\alpha-\gamma}{2} = 9,5948293$$

$$\frac{\alpha-\gamma}{2} = 21^0 28' 28'' \text{ und}$$

$$\frac{\alpha+\gamma}{2} = 63^0 25' 40'', \text{ daher}$$

$$\alpha = 84^0 54' 8''$$

$$\beta = 42^0 57' 12''.$$

§. 22.

Flächeninhalt des Dreieckes.

Der Flächeninhalt eines Dreieckes kann, wenn bestimmte Teile gegeben sind, berechnet werden und zwar in folgenden Fällen:

1) Wenn zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel bekannt sind, z. B. in Fig. 4, b, c und α. Die Fläche F ist:

$$F = \frac{b.h}{2}, \quad h = c . \sin \alpha$$

CIII. $$F = \frac{b.c.\sin \alpha}{2}, \text{ d. h.}$$

Der Flächeninhalt ist gleich dem halben Produkte aus zwei Seiten und dem Sinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels.

2) Wenn zwei Seiten und ein gegenüberliegender Winkel gegeben sind, z. B. b, c und γ (in Fig. 4).

In diesem Falle berechnet man zuerst einen zweiten Winkel nach dem Satze C., wodurch dieser Fall auf den ersten reduziert werden kann.

3) Wenn eine Seite und die zwei anliegenden Winkel gegeben sind. Auch dieser Fall kann nach dem Satz C. auf den ersten zurückgeführt werden.

4) Wenn alle drei Seiten gegeben sind.

Bei der Umformung der Gleichung CI. wurde für die Seiten a, b, c und Winkel α (in Fig. 4) erhalten:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{([a+b+c][-a+b+c])}.$$

Hätte man dort, $\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ von $1=1$ subtrahiert, so würde man unter ähnlichen Umwandlungen erhalten haben:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{(a-b+c)\,(a+b-c)}{bc}\right)},$$

also durch Multiplikation beider Gleichungen:

$$\sin\frac{\alpha}{2}\,.\,\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4}\sqrt{\left(\frac{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{b^2c^2}\right)}.$$

Nun ist aber nach CIII.:

$$F = \frac{b\,.\,c\,.\,\sin\alpha}{2} = \frac{bc}{2}\,.\,2\,.\,\sin\frac{\alpha}{2}\,.\,\cos\frac{\alpha}{2} = bc\,.\,\sin\frac{\alpha}{2}\,.\,\cos\frac{\alpha}{2} \text{ und}$$

CIV. $$F = \frac{1}{4}([a+b+c][-a+b+c][a-b+c][a+b-c]).$$

Wäre z. B. $a=3$, $b=4$, $c=5$, so erhielte man:

$$F = \frac{1}{4}\sqrt{([12]\,[6]\,[4]\,[2])} = \frac{1}{4}\sqrt{576} = \frac{1}{4}\,.\,24 = 6;$$

dieses Dreieck könnte demnach rechtwinklig sein.

§. 23.

Aus der Anwendung der trigonometrischen Funktionen auf die Bestimmung der Dreiecke lässt sich auch die Anwendbarkeit derselben zur Auflösung anderer Figuren erkennen. Für ein Viereck z. B., dessen Seiten a, b, c, d Sehnen desselben Kreises sind, lässt sich ein ähnlicher Satz zur Bestimmung des Flächeninhaltes finden, wie (in §. 22) einer für das Dreieck gefunden wurde, nämlich:

$$Fl = \frac{1}{4}([a+b+c-d][a+b-c+d][a-b+c+d][-a+b+c+d]).$$

Sammlungen von Aufgaben, welche durch diese wenigen Sätze aufgelöst werden können, sind ziemlich zahlreich, sie stellen sich aber im Gebiete der Mathematik und Naturkunde vielfach von selbst.
