Die Grössenlehre

für Realschulen populär bearbeitet

Des ... Theils, welcher die Raumlehre enthält, ... Cursus

Wucherer, Gustav Friedrich

Carlsruhe, 1812

Zweyter Abschnitt. Fortsetzung der Begriffe. Schwierigere Saetze und Aufgaben, hauptsaechlich Bildung der Drey- Vier- und irregulaeren Vielecke

urn:nbn:de:bsz:31-277256

Zweyter Abschnitt.

Fortsetzung der Begriffe. Schwierigere Sätze und Aufgaben, hauptsächlich Bildung der Drey= Vier= und irregulären Vielecke.

§. 48.

Zwey gerade Linien schließen niemals einen Flächenraum ein; man hat wenigstens drey hierzu nöthig, und von diesen dreyen müssen immer 2 zusammengenommen größer seyn, als die 3te. Eine solche, von drey geraden Linien begränzte Flächenfigur heißt ein Dreyeck oder Triangel. (Fig. 27 — 33.) Man theilt sie ein

1) rücksichtlich der Seiten in ungleichseitige (Fig. 27. 30 und 32.) wenn keine Seite der andern gleich ist; in gleichschenklichte (Fig. 28. 31 und 33) wenn zwey Seiten, AC und BC gleich sind, die 3te AB aber kürzer oder länger als eine von jenen bey

den ist, und in gleichseitige (Fig. 29.), wenn alle drey Seiten gleich sind;

2) rücksichtlich der Winkel aber in schiefwinklichte (Fig. 27. 28. 29. 30 und 31), wenn sie lauter schiefe, und in rechtwinklichte (Fig. 32 und 33.), wenn sie Einen rechten Winkel haben (§. 21.) Unter den schiefwinklichten heißen diejenigen spitzwinklicht, (Fig. 27. 28. und 29), bey welchen alle drey Winkel spitz sind, stumpfwinklicht hingegen, (Fig. 30 und 31.), wenn in ihnen Ein Winkel, CAB, stumpf ist.

Ungleichseitige und gleichschenklichte Dreyecke können demnach entweder spitz- oder stumpf- oder rechtwinklicht seyn; gleichseitige hingegen sind immer spitzwinklicht.

Im rechtwinklichten Dreyeck heißen die Schenkel des rechten Winkels Catheti, und die ihm gegenüberstehende längste Seite Hypotenuse.

§. 49.

Dreyecke sind übereinkommend (§. 10.), wenn sie sich decken. (§. 16.) Sie decken sich aber

1) wenn alle 3 Seiten, einzeln genommen, in einem, allen 3 Seiten, einzeln genommen, in andern gleich sind.

Denn man lege (Fig. 34.) das △ ABC auf das △ DEF, so wird, da AB = DE, A auf D und B auf

E fallen. Nun beschreibe man aus E mit dem Halbmesser EF den Bogen ab, und aus D mit dem Halbmesser DF den Bogen cd, so durchkreuzen sich diese beyden Bögen in F. Das Punkt C des ersten Dreyecks muß nun, einmal als Endpunkt der Linie BC, welche = EF ist, in den Bogen ab, aber auch als Endpunkt der Linie AC, welche = DF, in den Bogen cd fallen, folglich nothwendig, da es in beyde Bögen zugleich fallen soll, auf den beyden gemeinschaftlichen Durchkreuzungspunkt F zu liegen kommen.

2) Dreyecke decken sich ferner, wenn 2 Seiten, einzeln genommen, und der von ihnen eingeschlossene Winkel in einem, zweyen Seiten, einzeln genommen, und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel im andern gleich sind.

Es sey z. B. (Fig. 34.) AB = DE, AC = DF und der Winkel bey A = dem Winkel bey D; so wird, wenn man das 1te △ aufs 2te legt, AB auf DE und AC auf DF, mithin B auf E, C auf F, und folglich auch BC auf EF fallen.

3) Zwey rechtwinklichte Dreyecke, bey denen ein Cathetus in einem, einem Cathetus im andern, und die Hypotenuse in einem, der Hypotenuse im andern gleicht, decken sich.

Es sey (Fig. 35.) BC = IK und AC = HK. Man lege den rechten Winkel bey B auf den rechten Winkel bey I; so fällt AB in HI, BC auf IK und, da BC

= IK, auch C auf K. Nun beschreibe man mit HK = AC den Bogen m n, so muß A in diesen Bogen fallen, und zwar gerade auf H, denn fiele es drüber oder drunter, so würde ja AB nicht in HI fallen, was gegen die Voraussetzung wäre, daß die Winkel bey B und I rechte Winkel sind, und als solche sich decken.

4) Ebenso decken sich zwey stumpfwinklichte Dreyecke, wenn der stumpfe Winkel, einer seiner Schenkel und die ihm gegenüberstehende (längste) Seite, einzeln genommen, in einem, dem stumpfen Winkel, einem Schenkel desselben und der ihm gegenüberstehenden (längsten) Seite, einzeln genommen, im andern gleich sind.

Es sey (Fig. 36.) der $\angle$ x = dem $\angle$ y, DE = GH und BE = FH. Man lege den $\angle$ x auf den $\angle$ y, so fällt BD in FG, DE auf GH und, da DE = GH, auch E auf H. Beschreibt man nun, wie im vorigen Fall, mit FH = BE aus H den Bogen no; so erhellt ganz auf die nemliche Art, wie dort, daß auch B auf F fallen muß.

5) Zwey Dreyecke, in welchen Ein spitziger Winkel, einer seiner Schenkel und die jenem $\angle$ gegenüberliegende Seite, einzeln genommen, in einem, einem spitzigen Winkel, einem seiner Schenkel und der jenem $\angle$ gegenüberliegenden Seite, einzeln genommen, im andern gleich sind,

werden sich ebenfalls decken, insofern die dem gegebenen ∠ gegenüberliegende Seite größer, oder wenigstens eben so groß als der gegebene Schenkel des spitzigen Winkels ist; oder insofern, wenn die gegenüberliegende Seite kleiner als der Schenkel, der dem gegebenen Schenkel gegenüberliegende Winkel in beyden △△ von einerley Art, d. h. in beyden entweder ein rechter, oder in beyden spitzig, oder in beyden stumnf ist.

Unter der ersten Voraussetzung wird dieser Satz ganz ebenso, wie die Sätze in Nro. 3 und 4 bewiesen. Unter der 2ten Voraussetzung aber erhellt seine Wahrheit auf folgende Art:

Wäre es bestimmt, daß der dem gegebenen Schenkel gegenüberliegende ∠ in beyden △ △ ein rechter sey, so würde dieser Fall mit dem in Nro. 3. übereinkommen, ohne daß man auf die Gleichheit des gegebenen spitzigen ∠ zu achten nöthig hätte.

Ist es hingegen bestimmt, das jener ∠ in beyden △△ schief, und zwar entweder in beyden spitzig, oder in beyden stumpf sey; ist z. B. (Fig. 37.) $x = y$, $AC = NP$, $DC = MP$, und sind die Winkel r und b beyde spitzig; so lege man den ∠ y auf den ∠ x. Hier wird NM in AR, NP auf AC und mithin, da $AC = NP$, auch P auf C fallen. Beschreibt man nun mit $MP = DC$ einen Bogen oq, so durchschneidet dieser die Linie AR in den zwey Punkten B und D. Hier ist offenbar, daß zwey Dreyecke möglich sind, bey welchem $x = y$, $AC = NP$ und die dem $\angle x$ gegenüberliegende Seite DC oder BC (§. 16) = der dem $\angle y$ gegenüberliegenden Seite MP ist. Diese 2 Dreyecke sind das $\triangle$ ADC und das $\triangle$ ABC, von welcher das letztere, als ein Theil des ersten, viel kleiner ist. Allein da oben bestimmt wurde, daß die Winkel r und b beyde spitzig seyn sollen, der Winkel bey B im $\triangle$ ABC aber ein stumpfer $\angle$ ist; so konnte nur das $\triangle$ ADC gemeint seyn. Dieses muß aber vom $\triangle$ NMP gedeckt werden, d. h. es muß auch NM auf AD und M auf D fallen, weil nach den obigen Bestimmungen kein anderes $\triangle$ als das $\triangle$ ADC gedenkbar ist, wenn r ein spitziger $\angle$ seyn soll.

6) **Sind ferner in zwey Dreyecken Eine Seite und die an ihr anliegende Winkel, einzeln genommen, in einem, Einer Seite und den an ihr anliegenden Winkeln, einzeln genommen, im andern gleich, so werden auch in diesem Fall die Dreyecke sich decken.**

Es sey (Fig. 38.) $AB = CF$, $x = y$ und $n = m$. Man lege AB auf CF, so fällt A auf C und B auf F, aber auch, weil $x = y$, AD in CG und, weil $n = m$, BD in FG, mithin auch D auf G; denn fiele D nicht auf G, so müßte es fallen entweder auf einen andern Punkt der Linie FG oder ihrer Verlängerung, in welchem Fall x nicht = y seyn könnte, oder auf einen andern Punkt der Linie CG oder ihrer Verlängerung, wo dann n nicht = m seyn könnte, oder gar auf einen Punkt ausserhalb beyder Linien FG und CG, wo weder x = y, nach n = m seyn könnte.

7) Sind endlich Eine Seite, ein an ihr anliegender und ein ihr gegenüberstehender Winkel, einzeln genommen, in einem, Einer Seite, einem an ihr anliegenden und einem ihr gegenüberstehenden Winkel, einzeln genommen, im andern gleich, so ist, wie im §. 52. Nro. 2. lit. e gezeigt werden wird, auch der 3te Winkel in beyden Dreyecken gleich, und es kommt mithin dieser Fall mit dem vorhergehenden in Nro. 6. überein.

§. 50.

Folgerungen aus dem vorhergehenden §.

1) Wird (Fig. 39.) von der Spitze C eines gleichschenklichten Dreyecks ABC eine Perpendikulare CD auf die ungleiche Seite AB gefällt; so halbirt diese 1) das ganze Dreyeck ABC 2) die ungleiche Seite AB und 3) den Winkel an der Spitze oder den Winkel bey C; woraus weiter folgt, daß in jedem gleichschenklichten Dreyeck die an der ungleichen Seite anliegenden Winkel u und o gleich seyn müssen. Die Dreyecke ACD und BCD sind, nach §. 49. Nro. 3, übereinkommend, denn sie sind, da CD perpendikular auf AB, folglich m = n = 90° (§. 25, 22 und 21) rechtwinklichte Dreyecke, bey denen ein Cathetus CD im

erstern einem Cathetus CD im andern, und die Hypotenuse AC im erstern der Hypotenuse BC im andern gleich ist. Sind aber die Dreyecke ACD und BCD übereinkommend, so wird auch durch CD das ganze Dreyeck halbirt, AD ist = BD, x = y und u = o.

2) In einem gleichseitigen Dreyeck (Fig. 29.) sind alle 3 Winkel gleich; denn da AC = BC, so ist, nach; Nro. 1, der Winkel bey A = dem Winkel bey B da ferner auch AC = AB, so ist, ebenfalls nach Nro. 1, der ∠ bey C = dem ∠ bey B; und endlich, weil AB = BC, so ist aus gleichem Grunde, der Winkel bey C auch = dem ∠ bey A.

3) Ein Winkel BAC (Fig. 40.) wird halbirt, wenn man vom Scheitel A aus mit einer beliebigen Eröffnung des Zirkels gleiche Stücke AE und AD von seinen Schenkeln abschneidet, aus E und D mit beliebiger, jedoch gleicher Eröffnung des Zirkels in F Kreuzbögen macht, und endlich durch A und F die Linie AG zieht. Denn da alsdann AE = AD, EF =, DF und AF = AF, so ist, nach §. 49. Nro. 1, das △ AFE mit dem △ AFD übereinkommend, und folglich auch der ∠ GAB = dem ∠ GAC.

Man bemerke hierbey noch folgendes:

a) Auch auf dem Felde findet diese Auflösung Statt. AE und AD werden abgemessen, und an E und D zwey Meßstangen gelegt, so, daß sie in F zusammenstoßen. Sind aber D und E zu weit von einander, so nimmt man statt der Meßstangen 2 gleichlange

Schnüre. In F wird ein Stab gesteckt, und die Linie AF nach Belieben verlängert.

b) Ein Winkel kann auch sowohl auf dem Papier als auf dem Felde halbirt werden, wenn man ihn mißt, die Anzahl seiner Grade mit 2 dividirt, und diese Hälfte an einen oder den andern seiner Schenkel auf dem Papier mit dem Transporteur aufträgt, oder auf dem Felde mit dem Astrolab absteckt.

4) Eine gerade Linie AB (Fig. 41.) wird halbirt, wenn man aus ihren beyden Endpunkten A und B auf jeder Seite mit gleicher Eröffnung des Zirkels in C und D Kreuzbögen macht, und die Linie CD zieht. Hierdurch muß AE = BE werden, denn da der $\angle$ ACB, nach Nro. 3, durch die Linie CD halbirt wird, mithin x = y, aber auch AC = AB und CE = CE ist, so sind, nach §. 49. Nro. 2. die beyden Dreyecke ACE und BCE übereinkommend, und folglich auch AE = BE.

Bey dieser Aufgabe ist noch zu bemerken:

a) Wenn die Linie AB, welche halbirt werden soll, sehr lang ist, so schneidet man, von ihren Endpunkten aus auf beyden Seiten gleich große Stücke von ihr ab, und halbirt sodann das überbleibende mittlere Stück.

b) Auch hier kann man auf dem Felde ebenso, wie auf dem Papier, verfahren, wenn man, statt des Zirkels, Schnüre gebraucht.

c) Linien können auch auf dem Papier sowohl als auf dem Felde dadurch halbirt werden, daß man sie mißt, ihr Maaß durch 2 dividirt, und diese Hälfte auf dem Papier mit dem Zirkel, auf dem Feld mit der Meßstange von einem ihrer Endpunkte aus anträgt.

d) Endlich halbirt man Linien auf dem Papier häufig durch Probiren, indem man, nach dem Augenmaaß, den Zirkel ungefähr bis zur Hälfte der zu theilenden Linie CD (Fig. 42.) öffnet, nnd mit dieser Eröffnung, von beyden Endpunkten aus, Abschnitte E und F in der Linie macht. Treffen diese in Einem Punkt zusammen, so ist geschehen, was man verlangte. Treffen sie nicht zusammen, so wiederholt man bey dem Stückchen EF das nemliche Verfahren. Von diesem kleinen Stückchen EF wird ein nur mittelmäßig geübtes Augenmaaß leicht die Hälfte in der Eröffnung des Zirkels treffen, so, daß die beyden Abschnitte, von E und F aus, in Einem Punkt G zusammentreffen werden.

Ist die Linie lang, so gilt das Obenbemerkte auch hier.

5) Soll (Fig. 43.) auf eine gegebene Linie AB aus einem gegebenen Punkt C eine Perpendikulare CG errichtet werden; so mache von C aus mit gleicher Eröffnung des Zirkels Abschnitte in E und D, von E und D aus mit gleicher Eröffnung Kreuzbögen in H, und lege das Linial an H und C an, so kannst du die verlangte Perpendikulare CG ziehen.

Da hier CE = CD, EH = DH und CH = CH, so sind, nach §. 49. Nro. 1. die Dreyecke ECH und DCH übereinkommend, also ist auch m = n, und CG steht perpendikular auf AB (§. 25.)

6) Von einem gegebenen Punkt M (Fig. 44.) außerhalb einer gegebenen Linie CB wird auf dieselbe eine Perpendikulare MQ gefällt, wenn man von M aus mit gleicher Eröffnung des Zirkels in A und D Abschnitte, aus A und D mit gleicher Eröffnung in N Kreuzbögen macht, das Linial an N und M anlegt, und so die Linie MQ zieht.

Daß die Dreyecke AQM und DQM übereinkommend sind, wird ebenso, wie in Nro. 4. bewiesen. Sind aber diese Dreyecke übereinkommend, so ist auch n = b, d h. MQ steht auf CD perpendikular (§. 25.) Daß diese und die vorige Aufgabe auch ebenso auf dem Felde aufgelöst werden können, bedarf nach dem, was in Nro. 3 und 4 hierüber gesagt worden ist, kaum einer Erinnerung.

§. 51.

Ehe wir in den Folgerungen aus §. 49. fortfahren, ist es nöthig, hier einige neue Begriffe einzuschalten.

1) Unter Weite oder Entfernung eines Punktes M (Fig. 44.) von einer Linie CD versteht man eine Perpendikulare MQ, die von jenem Punkt auf diese Linie gezogen ist, oder doch als gezogen gedacht werden kann.

2) Eine Linie läuft mit einer andern parallel, wenn beyde überall gleichweit von einander abstehen. Es giebt sowohl gerade als krumme Parallelen. Zwey Kreislinien von verschiedenem Halbmesser, die einerley Centrum haben (concentrische Kreise) desgleichen concentrische Bögen sind krumme Parallellinien.

3) Werden 2 gerade Parallelen AC und BD (Fig. 45.) durch eine 3te gerade Linie EF durchschnitten; so entstehen 8 Winkel. Von diesen heißen die 4 innerhalb der Parallelen, x, z, a und m die innern, und die 4 übrigen die äussern Winkel im weitern Sinne. Dagegen versteht man unter innern Winkeln im engern Sinne die 2 zwischen den Parallelen und auf einerley Seite der durchschneidenden Linie liegende Winkel m und z, oder a und x. Ferner heißen x und m, desgleichen z und a Wechselswinkel, und von m ist q, von a ist r, von z ist o und von x ist n der entgegengesetzte äußere Winkel.

§. 52.

Fortsetzung der Folgerungen aus §. 49.

1) Da Parallellinien solche Linien sind, die überall gleichweit von einander abstehen (§. 51. Nro. 2.), so müssen bey geraden Parallelen alle Perpendikularen, die von beliebigen Punkten einer jeden auf die andere gefällt werden, gleich seyn (§. 51. Nro. 1.)

Fällt man nun (Fig. 46.) von H auf BD die Perpendikulare HG, von E auf AC die Perpendikulare EF, und zieht EH; so entstehen zwey Dreyecke EHF und EHG, die sich, nach §. 49. Nro. 3., decken, denn die Winkel bey F und G sind rechte Winkel, EF ist = HG, und die zu beyden Dreyecken gehörige Linie EH ist sich selbst gleich. Es müssen daher auch die den gleichen Seiten EF und HG gegenüberstehende Winkel y und x gleich seyn. Diese Winkel sind aber, nach §. 51. Nro. 3. Wechselswinkel, und folglich sind alle Wechselswinkel gleich. Hieraus folgt unmittelbar weiter, daß (Fig. 45.) die innern Winkel im engern Sinne, m und z zusammen 180° ausmachen; denn da x + z, nach §. 22., = 180°, so muß auch m + z = 180° seyn, weil für x der ihm gleiche Wechselswinkel m gesetzt werden kann. Dieß nemliche läßt sich auch von x und a zeigen.

Endlich ist auch jeder innere Winkel = dem ihm entgegengesetzten äussern, z. B. m = q; denn m ist = x, für x aber kann der ihm gleiche Scheitelwinkel q gesetzt werden (§. 23.) und folglich ist m auch = q.

2) Wird (Fig. 47.) mit irgend einer Seite eines Dreyecks ABC, z. B. mit AB durch die gegenüberliegende Spitze C eine Parallele DE gezogen; so sind, als Wechselswinkel, die Winkel x und n, deßgleichen die Winkel o und r gleich. Man kann daher statt m + x + o auch m + n + r setzen, und da, nach §. 22., m + n + r = 180°, so ist auch m + x + o = 180°. Dieß läßt sich bey jedem Dreyeck auf die nemliche Art zeigen, und folglich ist die Summe aller Winkel in einem jeden Dreyecke = 180°. Hieraus folgt weiter

a) 2 Winkel in einem Dreyeck machen zusammen immer weniger als 180°, daher können 2 gerade Parallelen, wenn man sie auch noch so weit verlängert, niemals zusammenstoßen. Denn stießen sie zusammen, so würden sie (Fig. 45) mit dem Stück der durchschneidenden Linie EF, welches zwischen ihnen liegt, ein Dreyeck bilden, was, da die innern Winkel im engern Raum zusammen = 180° sind, unmöglich ist.

b) In einem Dreyeck kann nur Ein rechter Winkel seyn, die beyden übrigen sind gewiß spitzig; denn, da ein rechter Winkel = 90°, so bleibt für die beyden andern nur 180° — 90°, das ist 90° übrig. Ein jeder von ihnen muß also weniger als 90° zu seinem Maaß haben, d. h. spitzig seyn.

c) Ist ein rechtwinklichtes Dreyeck (Fig. 33.) gleichschenklicht, so liegt der rechte Winkel bey C der ungleichen Seite AB gegenüber, und von den beyden spitzigen Winkeln bey A und B ist jeder = 45°; denn diese Winkel sind, nach §. 50. Nro. 1., gleich, und machen, wie so eben in b gezeigt wurde, zusammen 90° aus, folglich muß jeder die Hälfte von 90°, d. i. 45° zu seinem Maaß haben.

d) In einem Dreyeck kann nur Ein stumpfer Winkel seyn, die beyden übrigen sind gewiß spitzig — ein Satz, von dem sich jeder, der den in lit. b. verstanden hat, auf die nemliche Art leicht überzeugen wird.

e) Wenn 2 Winkel, einzeln oder zusammengenommen, in einem Dreyeck zweyen Winkeln, einzeln oder zusammengenommen, in einem andern Dreyeck gleich sind; so ist auch der 3te Winkel im ersten Dreyeck = dem 3ten Winkel im 2ten Dreyeck, denn jeder ist = 180° weniger der Summe der beyden übrigen. Da aber diese Summen in beyden Dreyecken nach der Voraussetzung gleich sind, so müssen es auch die Reste seyn, die entstehen, wenn jene Summen von 180° subtrahirt werden.

Daher kommt der 7te Fall im §. 49. mit dem 6ten überein.

f) Da in einem gleichseitigen Dreyeck (§. 50. Nro. 2.) alle 3 Winkel gleich sind, so ist jeder der 3te Theil von 180°, d. h. jeder hat 60° zu seinem Maaß.

g) Wenn in einem Dreyeck ABC (Fig. 48.) irgend eine Seite, z. B. AB nach D verlängert wird, so ist der dadurch entstehende äußere Winkel $u =$ der Summe der beyden gegenüberstehenden innern $= x + n$; denn es ist $m + u$, nach §. 22., $= 180°$, aber auch $m + (x + n) = 180°$, folglich muß $u = x + n$ seyn.

3) Obgleich niemand an dem Satz, daß in jedem Dreyeck die größere Seite dem größern und die kleinere Seite dem kleinern ∠ gegenüberstehe, im geringsten zweifeln wird; so wollen wir dennoch seine Wahrheit aus dem bisherigen ganz streng erweisen, um an diesem Beyspiel zu zeigen, wie sich Sätze, die zwar dem gesunden Menschenverstande sogleich einleuchten, gegen

die man aber doch noch eine oder die andere Einwendung machen kann, über alle Zweifel erheben lassen.

Es sey (Fig. 49.) AB größer als AC, so muß auch der $\angle$ m + n größer seyn als der $\angle$ b; denn man mache AS = AC, so ist o = m (§. 50. Nro. 1.) aber auch o = b + n, wie so eben in Nro. 2. lit. g. erwiesen wurde; folglich ist o gewiß größer als b und, da o = m, auch m größer als b. Ist aber schon m größer als b, so muß um so mehr m + n größer als b seyn.

Eben so läßt sich zeigen, daß wenn m + n größer als b ist, auch AB größer als AC seyn muß; denn wäre AB = AC, so müßte, nach §. 50. Nro. 1., m + n = b seyn, und wäre AB kleiner als AC, so müßte, nach dem, was so eben erwiesen wurde, m + n kleiner als b seyn. Da nun beydes wider die Voraussetzung ist, so muß auch AB größer als AC seyn.

4) Kehrt man den letzten Satz in §. 50. Nro. 1. um, so heißt er: Wenn in einem Dreyeck zwey an einer Seite anliegende Winkel gleich sind, so ist das $\triangle$ gleichschenklicht. Es sey in dem $\triangle$ ABC (Fig. 39.) u = o. Man halbire durch CD den $\angle$ bey C, so, daß x = y, so ist auch, nach Nro. 2 lit. e, m = n, folglich, da CD = CD, das $\triangle$ ACD übereinkommend mit dem $\triangle$ BCD (§. 49. Nro. 6.) und AC = BC.

5) Sind in einem $\triangle$ alle 3 Winkel gleich, so ist das $\triangle$ gleichseitig. Dieß ist der umgekehrte Satz von dem

in

in §. 50. Nro. 2., welcher sich ganz eben so, wie der vorige beweisen läßt.

6) Endlich wollen wir noch den Satz in Nro. 1. umkehren. Er heißt: wenn bey 2 Linien, die von einer dritten durchschnitten werden, entweder die Wechselswinkel gleich sind, oder die innern Winkel im engern Sinne zusammen 180° ausmachen, oder ein innerer Winkel = dem entgegengesetzten äußern ist, so laufen die Linien parallel. Ist nun (Fig. 45.) $m + z = 180°$, so ist, da auch $x + z = 180°$, $x = m$; und ist $q = m$, so ist abermals, weil $q = x$, auch $x = m$. Es kommt also auch bey den 2 letztern Voraussetzungen blos darauf an, zu zeigen, daß, wenn die Wechselswinkel gleich sind, die Linien parallel seyn müssen. Ist aber (Fig. 46.) $x = y$, und werden von E auf AC und von H auf BD die Perpendikularen EF und HG gefällt; so sind, da EH = EH, nach §. 49. Nro. 7., die beyden Dreyecke HEF und HEG übereinkommend, folglich EF und HG gleich, d. i. nach §. 51. Nro. 1 und 2. AC und BD gleichlaufend.

7) Soll mit einer Linie eine andere parallel gezogen werden, so ist die Entfernung entweder durch ein Punkt oder durch eine Linie gegeben. In beyden Fällen giebt es sowohl auf dem Papier als auf dem Felde mehrere Arten, auf die man die Aufgabe auflösen kann. Wir wollen die wichtigsten derselben kennen lernen.

a) Auf dem Papier.

a) Wenn die Entfernung durch ein Punkt gegeben ist.

Es sey (Fig. 50) mit der Linie CD durch das Punkt A die Parallele EF zu ziehen.

Erste Art. Mit Hilfe eines Parallellinials. Erklärung und Gebrauch dieses Instruments, Unvollkommenheit desselben.

Zweyte Art. Mit Hilfe des Winkelmaaßes in Verbindung mit einem gewöhnlichen Linial. Verfahren, wenn das Punkt A weit entfernt ist.

Dritte Art. Ziehe von A auf CD unter einer beliebigen Neigung die gerade Linie AG, und mache den $\angle$ y = dem $\angle$ x (§. 24.); so kann an A und r angelegt, und die Linie EF gezogen werden, welche mit CD parallel seyn muß, weil die Wechselswinkel x und y gleich sind.

Vierte Art. Setze den Zirkel in A, öffne ihn so weit, daß ein damit gezogener Bogen die Linie CD nur in Einem Punkt m berührt, und ziehe sodann mit dieser Eröffnung, von einem andern beliebigen Punkte n aus, den Bogen b c; so kann an A und an das von CD entfernteste Punkt dieses Bogens, an o angelegt, und darnach EF gezogen werden.

Um zu beweisen, daß die Linien hierdurch parallel werden müssen, ist zu wissen nöthig, daß jede gerade Linie FG (Fig. 51.), welche einen Kreis oder Bogen nur in Einem Punkte D so berührt, daß sie ganz außer den Cirkel fällt, eine Berührungslinie oder Tangente heiße, und daß ein in den Berührungspunkt D einer Tangente FG gezogener Radius CD mit der Tangente einen rechten Winkel mache. Die Wahrheit dieses Satzes aber wird jedem einleuchten, sobald man ihm zeigt, daß jede andere Linie HM, welche durch D geht, und mit CD schiefe Winkel macht, keine Tangente seyn kann. Denn man fälle von C auf HM das Perpendikel CK, und verlängere es nach L, so ist x größer als y (Nro. 2. lit. b.) folglich auch CK kleiner als CD (Nro. 3.) und, da CL = CD, CK auch kleiner als CL. Es fällt mithin K in den Cirkel, und die Linie HM muß den Umkreis noch einmal in I durchschneiden, kann also keine Tangente seyn. Dieß nemlich läßt sich aber von jeder andern Linie, die durch D geht, und mit CD schiefe Winkel macht, auf dieselbe Art zeigen.

Da nun, wie so eben bewiesen wurde, jeder in den Berührungspunkt einer Tangente gezogene Radius mit jener einen rechten Winkel macht, so steht (Fig. 50.) Am senkrecht auf CD und no senkrecht auf EF, und folglich sind, da Am = no, die Linien CD und EF parallel (§. 51. Nro. 1 und 2.)

b) Wenn die Entfernung durch eine Linie gegeben ist.

Erste Art. Nehmet die gegebene Linie in Zirkel, welches, wenn sie in Längenmaaß angegeben ist, auf dem verjüngten Maaßstab geschieht. Setzet (Fig. 52.) den Zirkel in ein beliebiges Punkt D, und ziehet den Bogen ab; so kann, mit Hilfe des Winkelmaaßes und Linials, durch das von AB entfernteste Punkt e jenes Bogens die verlangte Parallele CE gezogen werden.

Zweyte Art. Errichtet in D eine Perpendikulare De, machet sie = der gegebenen Linie, und verfahrt mit Winkelmaaß und Linial, wie bey der ersten Art.

Dritte Art. Nehmet die Linie in Zirkel, setzet in 2 beliebigen Punkten, D und F, ein, und ziehet die Bögen ab und cd; so kann an die von AB entfernteste Punkte e und m derselben das Linial angelegt, und darnach CE gezogen werden.

Vierte Art. Errichtet aus D und F zwey Perpendikularen, und machet sie beyde = der gegebenen Linie; so könnet ihr CE durch die Endpunkte, e und m ziehen.

b) Auf dem Felde.

a) Wenn die Entfernung durch ein Punkt gegeben ist.

Erste Art. Verfahrt ganz so, wie bey der 3ten Art in lit. a. a. Das bewegliche Winkelkreuz thut hier gute Dienste.

Zweyte Art. Fället (Fig. 50.) vermittelst der Kreuzscheibe von A auf CD das Perpendikel Am; errichtet mit demselben Instrument, von n aus, ein Perpendikel, und machet no = Am; so kann die durch 2 Stäbe in A und o der Lage nach bestimmte Linie EF nach Belieben verlängert werden (§. 27.)

b) Wenn die Entfernung durch eine Linie gegeben ist.

Errichtet (Fig. 52.) vermittelst der Kreuzscheibe aus 2 Punkten D und F, die ihr in der Linie AB nach Belieben, jedoch in einiger Entfernung annehmen könnt, 2 Perpendikel, und machet jeden derselben = der gegebenen Entfernungslinie, so kann nach den Stäben in e und m die Linie CE abgesteckt werden. (§. 27.)

8) Soll am Ende einer Linie, die nicht verlängert werden kann, eine Perpendikulare errichtet werden; so geschieht dieß auf dem Papier mit dem Winkelmaaß und auf dem Feld mit der Kreuzscheibe ebenso, wie wenn die Perpendikulare aus einem Punkt in der Linie zu errichten wäre. Kann oder will man sich aber jener Instrumente nicht bedienen, und soll z. B. (Fig. 53.) aus C das Perpendikel CF errichtet werden; so nehme man BC willkührlich, jedoch nicht allzu groß an, mache aus C und B mit der Eröffnung BC Kreuzbögen, und verlängere BD nach E, so daß DE = BD = CD, so liegt E perpendikular über C, und das verlangte Perpendikel kann gezogen werden.

Da das $\triangle$ BCD gleichseitig, so ist $x = 60°$, deßgleichen $y = 60°$ (Nro. 2. lit. f.) und $m = 180° - 60° = 120°$ (§. 22.) Ferner ist das $\triangle$ CDE, da CD = DE, gleichschenklicht, und mithin $n = o$ (§. 50.), aber auch jeder dieser Winkel $= \frac{180° - m}{2}$ d. i. $\frac{180° - 120°}{2}$ $= 30°$ (Nro. 2.) Daher $x + o = 60° + 30° = 90°$, oder CF perpendikular auf AC.

Noch eine andere Aufflösung dieser Aufgabe wird weiter unten vorkommen. Daß übrigens die hier gelehrte

Auflösung auch auf dem Felde Statt finde, bedarf kaum der Erinnerung.

9) Wenn 2 Parallelen EG und FH (Fig. 54.) zwischen 2 andern Parallelen AB und CD liegen, so sind sie gleich lang. Denn man ziehe GF, so ist, weil AB parallel mit CD, n als Wechselswinkel = y, und, weil EG parallel mit FH, auch y als Wechselswinkel = m. Da nun GF = GF, so sind (§. 49. Nro. 6.) die Dreyecke EGF und GHF übereinkommend, folglich auch EG = HF.

10) Stoßt man bey Absteckung einer geraden Linie AC auf einen undurchsichtigen Gegenstand; so müssen, wenn die Linie auf der andern Seite nach F verlängert werden soll, in B und C zwey gleichlange Perpendikel, BG und CH errichtet, die Linie GH nach K verlängert, und in I und K abermals 2 Perpendikel ID und KE von gleicher Länge mit den vorigen aufgerichtet werden. Verlängert man dann DE nach F, so ist geschehen, was man verlangte. Denn, da $x + y = 180°$, so laufen BG und CH parallel, und da diese beyden Perpendikularen gleich lang sind, so muß auch GH mit BC oder GK mit AC und ihrer Verlängerung durch den undurchsichtigen Gegenstand parallel seyn. Da ferner auch $m + n = 180°$, folglich ID parallel mit KE und ID = KE, so ist auch DE parallel mit IK, oder DF parallel mit GK. Und da endlich die Perpendikel ID und KE den Perpendikeln BG und CH gleich sind; so muß DF auf die Verlängerung von AC fallen, d. i. diese Verlän-

gerung selbst seyn. Um nun eine solche Linie AF zu messen, mißt man AC und DF, und, statt des nicht meßbaren Stückes CD, die Linie HI. Denn es sind, da CH = ID und HD = HD, die beyden rechtwinklichten Dreyecke CHD und IHD übereinkommend (§. 49. Nro. 3.), folglich auch CD = HI. Oder auch, da jene Dreyecke übereinkommend sind, so so ist auch r = z, und mithin, da diese Winkel Wechselswinkel sind, CH parallel mit ID (Nro. 6.) Nun ist oben gezeigt worden, daß CD parallel mit HI, und folglich sind CD und HI zwey Parallelen zwischen 2 Parallelen, mithin, nach Nro. 9., einander gleich.

§. 53.

Soll ein mit einem andern △ übereinkommender Triangel gebildet werden, so giebt es sowohl auf dem Papier als auf dem Felde 2 Hauptfälle. Entweder liegt dasjenige △, mit welchem das zu Bildende übereinkommmen soll, auf dem Papier gezeichnet, oder auf dem Felde abgesteckt vor unsern Augen, und zwar so, daß man daran messen kann, was man will; oder es sind bloß hinlänglich bestimmende Stücke desselben gegeben.

Erster Hauptfall.

1) Auf dem Papier.

Erste Art. Lege das gezeichnete △ gehörig über den Ort, wo das andere gezeichnet werden soll, durchsteche die

Winkelpunkte desselben mit der Kopiernadel, und ziehe die Linien aus.

Zweyte Art. Stelle die Füße eines dreyfüßigen Zirkels auf die 3 Winkelpunkte, und trage so das △ auf Einmal an den verlangten Ort. Zu etwas großen Dreyecken ist hier ein 3füßiger Stangen-Zirkel nöthig. Vorzeigung und Erklärung dieser Instrumente.

Dritte Art. Da aber in sehr vielen Fällen die vorliegende Zeichnung nicht durchstochen werden darf, und man auch nicht immer einen 3füßigen Zirkel bey der Hand hat; so ist es nöthig, noch eine dritte Art, welche in jedem Fall anwendbar ist, zu erlernen. Diese Art gründet sich auf §. 49. Nro. 1. Mache (Fig. 34.) wenn ACB das vorgegebene △ ist, DE = AB, und ziehe aus D mit AC und aus E mit BC die Bögen cd und ab; so kann D sowohl als E mit dem Durchkreuzungspunkt F zusammengezogen, und so das △ DEF gebildet werden, welches, nach §. 49. Nro. 1., mit dem △ ACB übereinkommend seyn muß. Man könnte zwar auch nach Nro. 2. ꝛc. eben dieses §. verfahren; allein da jene Art durchaus zureichend und zugleich die einfachste und sicherste ist, so wollen wir uns mit den übrigen nicht aufhalten, um so weniger, da sie im zweyten Hauptfall ohnehin beschrieben werden müssen.

2) Auf dem Felde.

Auch hier wollen wir von den verschiedenen, an und für sich möglichen Verfahrensarten, die sich sämtlich auf §. 49. gründen, aus dem so eben angegebenen Grunde abermals nur die einfachsten und sichersten herausheben.

Erste Art. Sie hat ihren Grund in Nro. 2. des angeführten §.

Es sey (Fig. 34.) ACB das im Felde abgesteckte Dreyeck. Mache DE = AB, trage hierauf in D den ∠ bey A, mache den 2ten Schenkel desselben DF = AC, und stecke, wenn es nöthig ist, zwischen E und F noch einige Stäbe; so sind die Dreyecke, nach §. 49. Nro. 2., übereinkommend. Der Winkel bey A wird entweder nach §. 24. oder mit Hilfe des Astrolabs auf DE getragen.

Zweyte Art. Sie beruht auf §. 49. Nro. 6.

Es sey (Fig. 38.) ABD das im Feld abgesteckte △. Mache CF = AB, und trage in C den dem ∠ x gleichen ∠ y, deßgleichen in F den dem ∠ n gleichen ∠ m. Nachdem nun bey Auftragung dieser Winkel ungefähr in a und b Stäbe gesteckt worden, so stelle dich in die Gegend von G, und suche durch Hin- und Hergehen den Punkt, welcher mit a und C, aber auch zugleich mit b und F in einer geraden Linie liegt. Wird dieser Punkt G mit einem Stabe bezeichnet, so ist das Verlangte geschehen, und es wird das dergestalt abgesteckte △ CFG, nach §. 49. Nro. 6., mit dem △ ABD übereinkommend seyn.

Dritte Art. Sie gründet sich, wie die 1te, auf §. 49. Nro. 2.

Fälle in dem vorgegebenen △ ABC (Fig. 34.) von der Spitze C auf die Seite AB mit Hilfe der Winkelscheibe das Perpendikel CG, mache abermals DE = AB, aber auch DH = AG oder HE = BG, und errichte aus H das Perpendikel HF. Wird nun HF = CG gemacht, so hat man auch den 3ten Winkelpunkt F, und somit das verlangte △ DEF gebildet.

Hier wird eigentlich das vorgegebene △ ABC durch das Perpendikel CG in 2 rechtwinklichte △ △ ACG und BCG zerlegt. Das rechtwinklichte △ DHF muß aber, nach §. 49. Nro. 2., mit dem rechtwinklichten △ ACG übereinkommen, weil der rechte Winkel bey H = dem rechten ∠ bey G, und die einschließenden Seiten DH und HF, einzeln genommen, den einschließenden Seiten AG und CG, einzeln genommen, gleich sind. Ebenso wird bewiesen, daß die △△ HEF und BCG übereinkommend seyn müssen, woraus folgt, daß es auch die ganzen △ △ DEF und ABC sind.

Zweyter Hauptfall.

1) Auf dem Papier.

Erste Aufgabe. Aus 3 gegebenen Seiten, von denen je zwey zusammengenommen größer als die 3te sind, ein bestimmtes übereinkommendes Dreyeck zu bilden.

Die Auflösung ist ganz dieselbe, die schon oben im 1ten Hauptfall, Nro. 1., in der dritten Verfahrensart ausführlich beschrieben und bewiesen wurde. Sind die Seiten nicht als gezeichnete Linien, sondern in Längenmaaß gegeben, so müssen sie auf einem, der Aufgabe beygelegten verjüngten Maaßstab in den Zirkel genommen werden.

Daß auf die nemliche Art aus Einer gegebenen Linie ein gleichseitiges, deßgleichen aus 2 Linien ein gleichschenklichtes △ gebildet werden könne, versteht sich von selbst.

Zweyte Aufgabe. Aus 2 Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel. Zeichne den gegebenen Winkel, und mache seine Schenkel = den gegebenen Seiten; so kann die 3te Linie des Dreyecks gezogen werden (§. 49. Nro. 2.)

Dritte Aufgabe. Ein rechtwinklichtes △ aus der gegebenen Hypotenuse und einem von beyden Catheten. Zeichne (Fig. 35) einen rechten Winkel DIK, mache den einen Schenkel desselben IK = dem gegebenen Cathetus, nehme die gegebene Hypotenuse in Zirkel, und beschreibe damit aus K den Bogen m n; so durchschneidet dieser den andern von unbestimmter Länge gezogenen Schenkel DI in H, wodurch, wenn man HK wirklich zieht, das verlangte △ HIK erhalten wird (§. 49. Nro. 3.)

Vierte Aufgabe. Ein stumpfwinklichtes Dreyeck aus dem gegebenen stumpfen Winkel, einem seiner Schenkel und der dem stumpfen Winkel gegenüberstehenden (längsten) Seite.

Zeichne (Fig. 36.) den gegebenen stumpfen ∠ y, mache den einen Schenkel HG so lang, als es in der Aufgabe bestimmt ist, nehme die Seite, welche dem stumpfen Winkel ∠ gegenüber liegen soll, in Zirkel, und ziehe damit aus H den Bogen no; so wird dieser den andern von unbestimmter Länge gezogenen Schenkel IG in F durchschneiden, und so, wenn HF wirklich gezogen wird, das verlangte △ HGF erhalten werden (§. 49. Nro. 4.)

Fünfte Aufgabe. Aus einem gegebenen spitzigen Winkel, einem seiner Schenkel und der jenem spitzigen $\angle$ gegenüberliegenden Seite.

Bey dieser Aufgabe unterscheide man folgende Fälle:

a) Ist die dem gegebenen spitzen $\angle$ gegenüberliegende Seite größer als der gegebene Schenkel jenes Winkels, so wird ebenso, wie bey der 3ten und 4ten Aufgabe verfahren.

b) Dieses Verfahren findet auch dann Statt, wenn die gegenüberliegende Seite $=$ dem Schenkel des Winkels ist.

c) Ist aber die gegenüberliegende Seite kleiner als der Schenkel des gegebenen $\angle$, so zeichne (Fig. 37.) den gegebenen $\angle$ x, mache den einen Schenkel desselben AC so lang, als es in der Aufgabe bestimmt ist, nehme die Seite, welche dem $\angle$ x gegenüberliegen soll, in Zirkel, und beschreibe damit aus C einen Bogen oq. Dieser Bogen wird den andern von unbestimmter Länge gezogenen Schenkel AR entweder gar nicht erreichen, in welchem Fall die Aufgabe unmöglich ist; oder er wird ihn nur in Einem Punkte berühren, wodurch (nach dem im vorhergehenden §. vorgekommenen Satz von den Tangenten) ein bestimmtes rechtwinklichtes $\triangle$ entsteht; oder es durchschneidet jener Bogen den Schenkel AR in 2 Punkten B und D, wodurch 2 Dreyecke ABC und ADC entstehen. Ist nun in der Aufgabe bestimmt, daß der dem gegebenen Schenkel AC gegenüberliegende ∠ stumpf seyn soll, so ist das △ ABC, soll er hingegen spitzig seyn, so ist das △ ACD das verlangte △. (§. 49. Nro. 5)

Sechste Aufgabe. Aus einer Seite und den 2 daran anliegenden Winkeln.

Mache (Fig. 38.) CF = der gegebenen Seite, trage darauf in C und F die zwey gegebenen Winkel y und m, und ziehe die Schenkel derselben aus, bis sie in G zusammenstoßen, so ist CFG das verlangte △ (§. 49. Nro. 6.)

Siebente Aufgabe. Aus Einer Seite, einem an ihr anliegenden und einem ihr gegenüberstehenden ∠.

Ziehe die Summe der 2 gegebenen Winkel von 180° ab, so erhältst du im Rest den 2ten, an der gegebenen Seite anliegenden ∠ (§. 52. Nro. 2 lit. e.) worauf wie in der 6ten Aufgabe verfahren wird. (§. 49. Nro. 7.)

2) Auf dem Felde.

Die 1te, 3te, 4te und 5te Aufgabe, die übrigens selten vorkommen, können erst weiter unten, im §. 64., nachdem von der Aehnlichkeit der △△ das Nöthige gesagt worden ist, aufgelöst werden; die Auflösungen der 2ten, 6ten und 7ten aber kamen oben schon in Nro. 2. des 1ten Hauptfalls bey den 2 ersten, dort angegebenen Verfahrensarten vor, und bedürfen also hier keiner nochmaligen Erwähnung.

§. 54.

Die Aufgabe in Nro. 2. des ersten Hauptfalls im vorigen §. findet unter andern auch ihre Anwendung bey der Messung unzugänglicher horizontaler Weiten auf dem Felde.

Die gewöhnlichsten Fälle, die hier vorkommen, sind:

1) Entweder kann man (Fig. 56.) bey einer zu messenden Linie AD zwar nicht gerade von A nach D, aber doch aus einem 3ten Punkt C an jene beyden Endpunkte kommen.

2) Oder es ist (Fig. 57.) bey der zu messenden Linie AD das eine Endpunkt A ganz unzugangbar.

3) Oder man kann endlich (Fig. 58.) an keines der beyden Endpunkte der zu messenden Linie AF gelangen.

Erste Aufgabe.

Wähle, wenn (Fig. 56.) die Linie AD gemessen werden soll, ein Punkt C, welches so liegt, daß man nicht nur von ihm nach A und D sehen, sondern auch ungehindert messen kann, und stecke daselbst einen Stab ein. Werden nun, nachdem man mit A und C ungefähr bey N, deßgleichen mit D und C ungefähr bey M einen Stab in gerader Linie hat stecken lassen, die beyden Linien CA und CD gemessen, und CA von C nach 𝔄 und CD von C nach 𝔇 getragen, so wird die Linie 𝔄𝔇 der zu messenden Linie AD gleich seyn. Denn da die Winkel y und x als

Scheitelwinkel, nach (§. 23.), gleich, und die Linien C𝔄 und C𝔇 eben so lang, als die Linien CA und CD sind; so sind die 2 Dreyecke C𝔄𝔇 und CAD übereinkommend, mithin auch 𝔄𝔇 = AD.

Zweyte Aufgabe.

Soll aber (Fig. 57.) die Linie AD gemessen werden, zu deren einem Endpunkte A man gar nicht kommen kann; so errichte mit Hilfe der Kreuzscheibe auf AD eine Perpendikulare DM von unbestimmter Länge, wähle darauf einen Punkt C, der von D ungefähr eben so weit, als D von A entfernt sey, und trage CD von C nach 𝔇. Wird nun in 𝔇 die Kreuzscheibe nach C gerichtet, durch die andere Visirspalte derselben gegen 𝔄 hinaus visirt, und von einer 2ten Person ein Stab so in A gesteckt, daß ihn die 1te durch die Scheibe, aber auch eine 3te Person bey N mit C und A in Einer Linie erblickt; so ist 𝔇𝔄 = DA. Denn da C𝔇 = CD, y (als Scheitelwinkel) = x, und der ∠ bey 𝔇 (als rechter Winkel) = dem ∠ bey D; so ist das △ C𝔇𝔄 übereinkommend mit dem △ CDA, folglich auch 𝔇𝔄 = DA.

Man ersieht hieraus, daß die Winkel bey D und 𝔇 nicht gerade rechte Winkel, sondern überhaupt nur gleiche Winkel seyn müssen.

Dritte Aufgabe.

Soll endlich (Fig. 58.) eine Linie AF gemessen werden, zu deren keinem Endpunte man kommen kann; so stecke disseits des Hindernisses eine Linie DD ab, die mit jener ungefähr parallel läuft, und fälle darauf mit der Kreuzscheibe die beyden Perpendikel AD und FE. Hierauf nehme einen beliebigen Punkt C an, trage CD von C nach D, CE von C nach E, und lasse, wie in der vorigen Aufgabe, in F und A zwey Stäbe so stecken, daß sie, der erstere mit C und F, der zweyte mit C und A in Einer Linie stehen, aber auch zugleich durch die Kreuzscheiben, welche in E und D auf die Line DD gestellt worden sind, gesehen werden können, so wird FA = FA seyn. Denn da aus den nemlichen Gründen, wie in der vorigen Aufgabe, das △ CDA mit dem △ CDA, und das △ CEF mit dem △ CEF übereinkommend seyn muß; so ist auch CA = CA und CF = CF. Und da ferner y = x ist, so muß auch das △ CFA mit dem △ CFA übereinkommend, folglich auch FA = FA seyn.

Uebrigens versteht es sich von selbst, daß auch hier die Winkel bey D und D, deßgleichen die bey E und E nicht gerade rechte, sondern überhaupt nur gleiche Winkel seyn müssen.

§. 55.

Hat eine Flächenfigur 4 Seiten, so laufen entweder je zwey einander gegenüberstehende parallel, oder nicht. Im erstern Falle heißen die Vierecke Parallelogramme, und zwar ein Quadrat, wenn (Fig. 62.) alle Seiten gleich und alle Winkel recht, ein Rhombus, Raute oder Wecke, wenn (Fig. 63.) alle Seiten gleich und alle Winkel schief, ein Rektangel, Rechteck oder

ab-

ablanges Viereck, wenn (Fig. 64.) nur die einander gegenüberstehenden Seiten gleich und alle Winkel recht, und endlich ein Rhomboide oder ablange Raute, wenn (Fig. 65.) nur die einander gegenüberstehenden Seiten gleich und alle Winkel schief sind. Ein jedes anderes Viereck heißt ein Trapez, und zwar ein Paralleltrapez, wenn 2 seiner Seiten parallel laufen (Fig. 59.) und ein gemeines Trapez, wenn (Fig. 60.) keine Seite mit einer andern parallel ist.

Flächenfiguren, die mehr als 4 Seiten haben, werden gemeiniglich Vielecke genannt. Sie sind regulär, wenn alle Seiten, deßgleichen alle Winkel bey ihnen gleich sind, irregulär hingegen, wenn dieß nicht der Fall ist (Fig. 61.). Vor jetzt sprechen wir blos von den letztern; die regulären kommen im 1ten Abschnitt des 2ten Cursus vor.

Jede gerade Linie, die ganz innerhalb einer Flächenfigur von einem Winkelpunkt an ein anderes Winkelpunkt gezogen wird, heißt eine Diagonale, z. B. (Fig. 60) die Linie AC. Solcher Diagonalen können, wenn keine die andere durchkreuzen soll, niemals mehr gezogen werden, als die Figur Seiten hat, weniger 3; folglich im △ gar keine, im Viereck 1 (Fig. 59. und 60), im Fünfeck 2 (Fig. 61.) ꝛc. Durch sie wird jede Figur in eben so viel △△ zerlegt, als sie Seiten hat, weniger 2; folglich das Viereck (Fig. 60.) in 2, das Fünfeck (Fig. 61.) in 3 ꝛc.

Die Winkel, die je 2 benachbarte Seiten einer Flächenfigur mit einander bilden, heißen die **Winkel am Umfang.** Man erhält bey einer jeden Figur die Summe derselben, wenn man 2 von der Zahl der Seiten abzieht, und mit dem Rest in 180° multiplicirt. Dieser Satz läßt sich leicht auf folgende Art beweisen:

Man zerlege (Fig. 61) das Fünfeck ABEDC. durch die 2 Diagonalen AD und BD. in Dreyecke; so ist die Zahl dieser Dreyecke = 5 — 2 = 3. Diese △△ sind ACD, ABD und BED, und die Summe ihrer Winkel ist = der Summe der Winkel am Umfang des Fünfecks. Nun machen aber in jedem △ die 3 Winkel zusammen 180°, folglich die Winkel in 3 Dreyecken 3 mal 180°.

Leicht läßt es sich nun zeigen, daß beym Quadrat und Rhombus, beym Rechteck und dem Rhomboiden, nach den oben gegebenen Begriffen von diesen 4 Figuren, die gegenüberstehenden Seiten wirklich parallel laufen, d. h. daß jene Figuren wirklich Parallelogramme sind. Denn man ziehe (Fig. 62, 63, 64 und 65.) die Diagonalen AD, EH, IM und NQ, so wird dadurch jedes dieser Vierecke in 2 Dreyecke zerlegt, welche, da ihre Seiten gleich sind, übereinkommend seyn werden. Sind aber diese △△ übereinkommend, so sind auch in jedem Viereck die Winkel r und x, deßgleichen die Winkel m und y gleich, und folglich (§. 52. No. 6.) in Fig. 62. AB mit CD und BD mit AC, in Fig. 63 EF mit GH und FH mit EG, in Fig. 64 IK mit LM und KM mit IL und in Fig. 65. NO mit PQ und OQ mit NP parallel.

Auch erhellt hieraus ferner, daß in den schiefwinklichten Parallelogrammen (Fig. 63 und 65) die einander nach der Diagonale gegenüberstehenden Winkel gleich sind.

§. 56.

Wir kommen nunmehr zu der Aufgabe: Ein Parallelogramm, ein Trapez, oder auch ein irreguläres Vieleck zu bilden, welches mit einem andern, vor Augen liegenden übereinkommend seyn soll.

1) Auf dem Papier.

Erste Art. Verfahre wie oben bey der ersten Art, des ersten Hauptfalls in §. 53, d. h. durchsteche, nach gemachter Vorbereitung, die Winkelpunkte.

Es bedarf übrigens kaum einer Errinnerung, daß nach dieser, so wie auch nach den folgenden Verfahrensarten nicht nur einzelne Vielecke, sondern auch ganze geometrische Plane kopirt werden können.

Reißbrett, Reißschiene, Farben und Pinsel zum Planzeichnen, Handgriffe beym Aufspannen des Papiers, Bezeichnungsart der gewöhnlichsten Gegenstände auf geometrischen Planen. (Anweisung wie ökonomische und militairische Situationskarten nach bestimmten Grundsätzen zu zeichnen sind — Berlin, 1799.)

Zweyte Art. Lege, wenn die vorgegebene Zeichnung nicht durchstochen werden darf, ein sogenanntes Kopierblatt, d. i. ein dünnes und durch besondere Zubereitung vollkommen durchsichtig gemachtes Papier *) auf die abzutragende Figur, bemerke darauf alle bemerkenswerthe Punkte und Linien, und kopiere sodann von diesem Blatt entweder nach der ersten Art, oder mit Hülfe eines andern Blatts Postpapier, welches auf der einen Seite mit Bleystiftsschabsel gefärbt worden ist.

Wird nemlich dieses Papier, nachdem man es zuvor mit einem weichen leinenen Tüchlein überfahren hat, damit das Ueberflüssige der Farbe hinwegkomme, mit der gefärbten Seite auf das Papier, worauf die Nachzeichnung kommen soll, und darüber das Kopierblatt gelegt; so wird, wenn mit einem etwas abgerundeten Stift von Bein oder Stahl der Zeichnung auf dem Kopierblatt nachgefahren wird, diese Zeichnung getreu auf dem untersten Papier er-

*) Von den verschiedenen Arten, Kopierblätter zu verfertigen, führe ich hier nur einige der leichtesten an: 1) Ein Bogen feines Postpapier wird mit einer Mischung ausgeschmolzenem geläuterten Wachs und etwas Terpentinöl, worein man eine Locke Baumwolle taucht, bestrichen, und hierauf zwischen Makulatur liegend mit einem warmen Bögeleisen überfahren. 2) Reibe einen Bogen Postpapier auf einem steinernen Tisch mit einem gläsernen Glätter, bestreiche ihn dann auf beyden Seiten vermittelst etwas Baumwolle mit einer Mischung aus reinem Terpentin- und Baumöl, halte ihn über eine gelinde Glut, bis es anfangen will, zu rauchen; reibe ihn mit Waizenkleyen auf beyden Seiten wohl ab, und überfahre ihn endlich, nachdem er mit einem feinen Tuch von aller an-

scheinen, wo sie alsdann ohne Mühe vollends ausgearbeitet werden kann. Das Bleystiftschabsel wird mit etwas Schweinenfett angemacht, und mit einem Bausch von leinenem Tuch über dem Papier verbreitet.

Dritte Art. Theile, wenn (Fig. 66.) ein ganzer Plan GHEF kopiert werden soll, entweder durch fortgesetztes Halbiren, oder durch Probiren, oder nach der Art, die weiter unten im §. 63. vorkommen wird, die Seiten GH und EF, deßgleichen GE und HF in eine beliebige Menge gleicher Theile; so entstehen, wenn die Theilpunkte durch Bleystiftlinien zusammengezogen werden, entweder lauter kleine gleiche Quadrate, in so fern die Theile von GE und HF den Theilen von GH und EF gleich sind, oder, wenn dieß nicht der Fall ist, lauter kleine gleiche Rechtecke. Wird nun, nachdem man zuvor den Umfang des Plans auf irgend eine Art kopiert hat, so, daß CDAB mit GHEF übereinkommt, mit CDAB ganz eben so verfahren; so kann man alsdann das, was in jedem kleinen Quadrat oder Rechteck enthalten ist, nach dem Augenmaaß mit freyer Hand zeich-

---

hängenden Kleye gereinigt worden ist, mit einer entzwey geschnittenen frischen Zwiebel. 3) Nehme weißes Steinöl (petroleum album), bestreiche damit einen feinen Bogen, wie gewöhnlich, trockne die überflüssige Fettigkeit mit einem Tuche ab, hänge den Bogen einige Zeit hindurch in die Nähe eines Ofens, oder über ein gelindes Kohlfeuer, und reinige ihn endlich mit warmer Waizenkleye. (Gütle's Versuche aus der natürlichen Magie — Leipzig und Jena 1791.)

nen, und am Ende die Bleystiftlinien auf beyden Blättern mit Cautschuk oder Brodkrumen ausreiben.

Da jedoch auf saubere Plane keine dergleichen Linien gezogen werden dürfen, so läßt man sich eine Rahme von Holz verfertigen, die genau auf GHEF paßt, theilt ihre Seiten eben so ein, sticht die Theilpunkte durch, und zieht, statt der Bleystiftlinien, von einem jeden Punkt zu dem ihm gegenüberstehenden feine Fäden. Eine solche Vorrichtung heißt ein Fadennetz. Statt seiner kann man sich auch eines Kopierblattes bedienen, worauf obige Linien mit Bleystift gezogen sind.

Vierte Art. Zerlege die vorgegebene Figur durch Diagonalen in Dreyecke, oder stelle dir, wenigstens vor, daß sie so zerlegt sey, und trage dann ein Dreyeck nach dem andern ab, entweder mit dem 3füßigen Zirkel nach der 2ten, oder mit einem gewöhnlichen Zirkel nach der 3ten Art des ersten Hauptfalls im §. 53.

So wird (Fig. 61.) das Fünfeck 𝔄𝔅𝔈𝔇ℭ mit dem Fünfeck ABEDC übereinkommend gezeichnet, wenn man, nachdem 𝔄𝔅 = AB gemacht worden, mit AD und BD aus 𝔄 und 𝔅 in 𝔇, mit AC und DC aus 𝔄 und 𝔇 in ℭ, und mit BE und DE aus 𝔅 und 𝔇 in 𝔈 Kreuzbögen macht, und die dadurch erhaltene Punkte 𝔄, 𝔅, 𝔇, ℭ, 𝔈, zusammenzieht.

Zeichnung übereinkommender Parallelogramme nach dieser Art.

Fünfte Art. Mache (Fig. 61.) AB = AB, trage darauf in B den Winkel ABE, und mache BE = BE. Ebenso wird auf BE in E der Winkel bey E getragen, und ED = ED gemacht. Werden nun aus A mit AC und aus D mit DC in C Kreuzbögen gezogen, so schließt sich das Fünfeck, welches mit dem vorgegebenen aus leicht begreiflichen Gründen übereinkommend seyn muß.

Man hätte aber auch auf ED in D den ∠ EDC und auf AB in A den ∠ BAC tragen können, so würde sich das Fünfeck ebenfalls in C geschlossen haben.

Oder man hätte endlich auf ED in D den ∠ EDC tragen, und DC = DC machen können, so würde durch Ziehung der Linie CA die Figur geschlossen worden seyn.

Man braucht also nach dieser Art entweder alle Seiten und alle Winkel weniger 3, oder alle Seiten weniger 2 und alle Winkel weniger 1, oder alle Seiten weniger 1 und alle Winkel weniger 2, und die Prüfung geschieht, wenn man untersucht, ob im ersten Fall die 3 übrigen Winkel, im 2ten die 2 übrigen Seiten und der noch übrige Winkel, und im 3ten die noch übrige Seite und die 2 noch übrigen Winkel in beyden Figuren gleich sind.

Zeichnung übereinkommender Parallelogramme nach dieser Art, und zwar insbesondere aus hinlänglich bestimmenden Stücken derselben. Diese Stücke sind beym Quadrat Eine Seite, beym Rhombus Eine Seite und Ein Winkel, wodurch immer auch der andere an der nemlichen

Seite anliegende Winkel gegeben ist, weil er, nach §. 52. No. 1, die Ergänzung zu 180° seyn muß; beym Rechteck 2 Seiten und bey dem Rhomboiden 2 Seiten und Ein Winkel, wo es rücksichtlich des andern an ebenderselben Seite anliegenden Winkels die nemliche Beschaffenheit wie beym Rhombus hat.

Sechste Art. Auch vermittelst Perpendikularlinien läßt sich diese Aufgabe auflösen, daher diese Auflösungsart auch die Perpendikularmethode genannt wird. Wir haben sie schon oben im §. 53, bey der zweyten Art. in No. 2. des ersten Hauptfalls, nemlich in der Lehre von der Bildung übereinkommender Dreyecke auf dem Feld, einigermaaßen kennen gelernt, und werden sie weiter unten, wo vom Aufnehmen und in Grundlegen der Felder die Rede seyn wird, noch genauer kennen lernen. Hier aber, auf dem Papier würde sie bey geradlinichten Figuren ohne Noth viel zu weitläufig und beschwerlich seyn, und wird daher nur bey einer genauen Zeichnung übereinkommender krummlinichter Figuren angewendet.

Ziehe mitten durch die vorgegebene Figur (Fig. 67.) eine gerade Linie AB, und fälle auf sie auf beyden Seiten von jedem Punkte, wo die krumme Linie eine merkliche Biegung hat, die Perpendikel ab, dc, fe, ꝛc. Mache ferner 𝔄𝔅 = AB, 𝔄b = Ab und das Perpendikel ab = ab, deßgleichen 𝔄c = Ac und das Perpendikel dc = dc ꝛc. so kann die krumme Linie durch Verbindung der Punkte 𝔄 a f m ꝛc. gezogen werden.

Hier wird jeder Punkt der krummen Linie (A und

B ausgenommen) z. B. der Punkt f als die Spitze eines Dreyecks ABf betrachtet, und sodann, nach der eben aus §. 53 angeführten Art, ein anderes mit jenem übereinkommendes △ 𝔄𝔅f gebildet, wodurch nothwendig, sobald man Punkte genug annimmt, auch die ganze Figur übereinkommend werden muß. Man sieht nemlich die krumme Linie als aus vielen kleinen geraden Linien zusammengesetzt an; eine Vorstellung, deren wir uns noch mehrmals bedienen werden, und nach der jede krummlinichte Figur eine geradlinichte von sehr vielen kleinen Seiten ist.

Statt der Linie AC (Fig. 67.) kann man auch (Fig. 68.) um die Figur ein beliebiges Viereck, etwa ein Rektangel ABCD ziehen, worauf im Wesentlichen verfahren wird, wie oben.

2) Auf dem Felde.

Sollte je der Fall vorkommen, daß auf dem Felde ein Vier- oder irreguläres Vieleck so gebildet werden müßte, daß es mit einem andern, vor Augen liegendenden übereinkommend sey; so würde die oben gelehrte fünfte Verfahrensart die kürzeste, die Perpendikularmethode aber sicherer seyn, indem bey der Auftragung schiefer Winkel weit eher, als bey der Errichtung und Fällung von Perpendikularlinien gefehlt wird.

Kann man aber nicht frey in der Figur herum gehen, so bleibt freylich keine andere, als jene fünfte Verfahrensart übrig. Man mißt im letzten Fall, um auch die Prüfung anstellen zu können, alle Seiten und Winkel, wo dann die Summe der gemessenen Winkel mit der Summe übereinstimmen muß, die nach der im §. 55. angegebenen und bewiesenen Regel berechnet wird. Jedoch folgt aus dieser Uebereinstimmung die Richtigkeit der vorgenommenen Winkelmessung nur mit Wahrscheinlichkeit, und keineswegs mit voller Gewißheit, denn es wäre ja möglich, daß man den einen Winkel um eben so viel zu klein gefunden hätte, als man einen andern zu groß gefunden hat, wo dann die beyden Fehler in der Summe sich aufheben würden.

§. 57.

Was man sich unter Höhe im natürlichen Sinne zu denken habe, ist im §. 29. gesagt worden; spricht man hingegen von der Höhe einer Flächenfigur z. B. eines Dreyecks oder eines Parallelogramms, so versteht man darunter ein Perpendikel, das auf eine beliebige Seite der Figur von dem entferntesten Winkelpunkt gefällt wird. Diese Seite heißt sodann, rücksichtlich der auf sie gezogenen Höhe, die Grundlinie oder Basis der Figur. So ist z. B. (Fig. 34.) das Perpendikel CG die Höhe des Dreyecks ABC für die Grundlinie AB, deßgleichen (Fig. 63.) das Perpendikel GT die Höhe des Rhombus EFGH für die Grundlinie EF und (Fig. 64.) IL oder KM die Höhe des Rektangels IKLM für die Grundlinie IK oder LM, und IK oder LM die Höhe eben dieses Rektangels für die Grundlinie JL oddr KM.

Wird bey einem stumpfwinklichten △ ABC (Fig. 30.) nicht die längste Seite, welche dem stumpfen ∠ gegenübersteht, sondern eine der beyden kürzern, z. B. BC für die Grundlinie angenommmen, so muß sie nach D hinaus verlängert werden, um die Höhe AF auf sie ziehen zu können. Inzwischen ist in diesem Fall dennoch BC und keineswegs BF die Grundlinie. In jedem rechtwinklichten △ ABC (Fig. 32.) ist, wenn man den einen Cathetus AB oder BC für die Grundlinie annimmt, der andere Cathetus BC oder AB die dazu gehörige Höhe. Man könnte aber auch die Hypotenuse AC zur Basis annehmen, wo sodann von B auf AC ein Perpendikel gefällt werden müßte, um die Höhe des Dreyecks zu erhalten.

Beym Quadrat ist die Höhe immer = der Grundlinie; beym Rechteck ist sie, wie schon oben gezeigt wurde, eine der kleinern Seiten, wenn eine der größern, und eine der größern Seiten, wenn eine der kleinern zur Grundlinie angenommen worden ist; beym Rhombus und dem Rhomboiden aber muß sie besonders gezogen werden. Aus diesem bisher entwickelten Begriff von Höhe einer Figur folgt, wenn wir ihn mit dem Begriff von Parallellinien zusammenhalten, unmittelbar, daß Dreyecke und Parallelogramme, welche zwischen einerley Parallellinien liegen, auch einerley Höhe haben — ein Satz, dessen wir in der Folge zum öftern benöthigt seyn werden.

§. 58.

Um diesen und den folgenden § recht zu verstehen, wird es nöthig seyn, sich zuvor die in § 10. No. 5 gegebenen Begriffe von gleich, ähnlich und übereinkommend aufs neue lebhaft zu vergegenwärtigen, damit ja keine Verwechslung dieser Begriffe vorgehe. Es handeln nemlich diese beyden §§ von der Gleichheit der Parallelogramme unter sich, der Parallelogramme und Dreyecke, und der Dreyecke unter sich. Die hieher gehörigen Sätze und Aufgaben sind.

1) Parllelogramme, von welcher Art sie auch seyn mögen, sind gleich, wenn sie einerley Grundlinie und Höhe haben. Denn

a) sind die Parallelogramme von einerley Art, sind z. B. beyde Quadrate, oder beyde Rhomboiden rc. so werden sie gleich seyn, weil sie in diesem Fall übereinkommend sind. Daß sie dieß sind, läßt sich leicht beweisen, indem man auf die nun genugsam bekannte Art zeigt, daß sie unter jenen Voraussetzungen sich decken müssen.

b) Sind aber die Parallelogramme nicht von einerley Art, ist z. B. das eine (Fig. 69.) ein Rechteck AFBD und das andere ein Rhomboide AFCE, welcher mit jenem die Grundlinie AF und die Höhe FD gemeinschaftlich hat; so ist das Rechteck AFBD gleich dem Rhomboiden AFCE, denn jenes ist $=$ dem Paralleltrapez AFCD $+ \triangle$ ABC, und dieser $=$ dem nemlichen Paralleltrapez AFCD $+ \triangle$ FDE. Nun sind aber die beyden rechtwinklichten $\triangle\triangle$ ABC und FDE, nach §. 49. No. 3 übereinkommende Dreyecke, indem AB $=$ FD und AC $=$ FE, und folglich sind die Parallelogramme, da ihre Theile gleich sind, selbst gleich.

2) **Jeder Triangel, der mit irgend einem Parallelogramm gleiche Grundlinie und Höhe hat, ist die Hälfte von diesem Parallelogramm.**

a) Sind (Fig. 69.) das △ AFB und das mit ihm gleiche Grundlinie und Höhe habende Parallelogramm AFBD beyde rechtwinklicht; so sind die 2 △△ AFB und BDF, welche zusammen das Parallelogramm ausmachen (§. 49. No. 1.) übereinkommend, folglich jedes die Hälfte des Parallelogramms.

b) Sind (Fig. 69.) das △ AFE und das mit ihm gleiche Grundlinie und Höhe habende Parallelogramm AFCE beyde schiefwinklicht; so ist der Beweis ganz derselbe, wie in lit. a.

c) Ist (Fig. 69.) das △ AFB rechtwinklicht, hingegen das mit ihm gleiche Grundlinie und Höhe habende Parallelogramm AFCE schiefwinklicht; so ist, nach lit. a, das △ die Hälfte vom Parallelogramm AFBD, und weil, nach No. 1. lit. b. dieses Parallelogramm = dem Parallelogramm AFCE, auch die Hälfte von diesem.

d) Ganz derselbe Beweis findet statt, wenn (Fig. 69.) das △ AFE schiefwinklicht, und das mit ihm gleiche Grundlinie und Höhe habende Parallelogramm AF BD rechtwinklicht ist.

3) **Zwey Dreyecke, von welcher Art sie auch**

seyn mögen, sind gleich, wenn sie gleiche Grundlinie und Höhe haben.

Da, nach No. 2, jedes die Hälfte von einem Parallelogramm ist, das mit ihm gleiche Grundlinie und Höhe hat, Parallelogramme aber, die gleiche Grundlinie und Höhe haben, nach No., 1 gleich sind; so werden auch ihre Hälften, d. h. die △△ gleich seyn.

4) Aus No. 3 ergiebt sich die Auflösung zweyer Aufgaben, welche in der Lehre von der Theilung der Felder von vorzüglicher Wichtigkeit sind. Die erste derselben heißt:

Aus einer gegebenen Grundlinie AC (Fig. 70.) und einer gegebenen Höhe EF ein △ zu bilden, so, daß die der Grundlinie AC gegenüberstehende Spitze in die mit AC unter einem beliebigen Winkel zusammengezogene Linie CD fällt.

Nehme auf AC einen beliebigen Punkt B, ziehe aus diesem Punkt mit EF den Bogen ab, und durch den höchsten Punkt desselben mit AC die Parallele HG, so durchschneidet diese die Linie CD in I. Wird nnn AI gezogen, so ist das △ ACI das verlangte, indem AC seine Grundlinie, und die Weite der Parallelen AC und GH, d. i. EF, seine Höhe ist.

5) Die zweyte jener Aufgaben heißt: Auf die Sei-

te AC (Fig. 71.) eines Dreyecks ABC ein anderes △ zu setzen, welches jenem gleich sey, und dessen Spitze ebenfalls in einer mit AB unter einem willkührlichen ∠ zusammengezogenen Linie AD liegen soll.

Ziehe von B aus den Bogen m n, so, daß er die Linie AC in E berühre, so ist AC Grundlinie und BE die Höhe des △ ABC. Nehme auf AC einen beliebigen Punkt F, beschreibe daraus mit BE den Bogen xy, und ziehe durch dessen höchsten Punkt mit AC die Parallele GH, so wird hierdurch AD in I geschnitten, und das verlangte △ wird erhalten, wenn man IC zieht. Denn nun haben ja beyde △△ ABC und ACI eine gemeinschaftliche Grundlinie AC, und, da FK = BE, auch einerley Höhe, und müssen daher, nach No. 3, gleich seyn.

6) Ein Parallelogramm, das mit einem △ gleiche Grundlinie, aber nur die halbe Höhe, oder gleiche Höhe, aber nur die halbe Grundlinie hat, ist dem △ gleich.

a) Es haben (Fig. 72.) das Parallelogramm ABCE und das △ ACF zur gemeinschaftlichen Grundlinie AC, und jenes CE, dieses aber CF = 2 × CE zur Höhe. Das Parallelogramm besteht aus dem Paralleltrapez ADCE und aus dem △ ABD, das △ ACF aber aus dem nemlichen Paralleltrapez ADCE und dem △ DEF. Sind daher die △△

ABD und DEF gleich, so müssen es auch das Parallelogramm ABCE und das △ ACF seyn. Jene 2 △△ sind aber gleich, weil sie übereinkommend sind, indem nach der Voraussetzung CE = EF, und AB = CE, folglich auch AB = EF, aber auch o = x und r = n (§. 49. No. 7.)

b) Betrachtet man CE und CF als die Grundlinien, und AC als die gemeinschaftliche Höhe, so ist auch der zweyte Theil des aufgestellten Satzes bewiesen.

c) Eben so leicht wird man begreifen, daß auch das △ CMF, welches CF zur Grundlinie und mit dem Parallelogramm gleiche Höhe hat, weil es mit ihm zwischen einerley Parallelen liegt, dem Parallelogramm gleich seyn müße. Denn da dieses △, nach No. 3, dem mit ihm gleiche Grundlinie und Höhe habenden △ ACF gleich, von diesem aber die Gleichheit mit dem Parallelogramm bereits erwiesen ist; so ist auch das △ CMF = dem Parallelogramm ABCE.

§. 59.

Zu den Sätzen des vorigen § gehört noch folgender, der, seiner großen Wichtigkeit wegen, im gegenwärtigen § besonders abgehandelt wird. Er wird gemeiniglich von seinem Erfinder Pythagoras, einem Griechischen Weltweisen, der Pythagoräische Lehrsatz genannt, und heißt:

Ein Quadrat, dessen Seite = der Hypote-

potenuse eines rechtwinklichten Dreyecks ist, ist so groß, als zwey Quadrate zusammengenommen, von welchen das eine den einen, und das andere den andern Cathetus jenes Dreyecks zur Seite hat.

Oder kürzer:

Das Quadrat der Hypotenuse ist = der Summe der Quadrate beyder Catheten.

Die Wahrheit dieses Satzes erhellt zwar schon aus dem sinnlichen Anblick von Fig. 73, läßt sich aber auch, und zwar auf mancherley Art, mit der größten Strenge erweisen. Wir wollen jedoch hier von allen den Beweisen, die für ihn erfunden worden sind, nur Einen herausheben; nemlich den ursprünglichen, den, der am meisten innere Ueberzeugung gewährt, und unmittelbar auf die im vorigen §. vorgetragenen Sätze gegründet ist.

Man ziehe (Fig. 74.) mit BU durch A die Parallele AE, so wird dadurch das Quadrat der Hypotenuse in 2 Rechtecke zerlegt, die wir der Kürze halber, mit den Buchstaben B und A, so wie die Quadrate der beyden Catheten mit den Buchstaben C und D benennen wollen. Ließe sich nun zeigen, daß das Quadrat C = dem Rechteck B, deßgleichen das Quadrat D = dem Rechteck A sey, so wäre der aufgestellte Satz bewiesen. Es ist aber

1) C = B, denn zieht man AU und SZ, so sind

die dadurch entstehende 2 Dreyecke ABU und BSZ (nach §. 49. No. 2.) übereinkommend; indem

$$BU = BS$$
$$AB = BZ \text{ und, weil } m = r,$$
$$m + n = r + n$$

Nun ist aber das △ ABU (nach § 58 No. 2) = der Hälfte von 𝔅, und das △ BSZ = der Hälfte von ℭ, mithin

$$\frac{\mathfrak{C}}{2} = \frac{\mathfrak{B}}{2} \text{ und } \mathfrak{C} = \mathfrak{B}.$$

2) 𝔇 = 𝔄, denn, zieht man AT und BD, so sind auch hier die dadurch entstehenden Dreyecke AST und und BDS (nach §. 49. No. 2.) übereinkommend, indem

$$ST = BS$$
$$AS = DS \text{ und, weil } x = s$$
$$x + v = s + v$$

Nun ist aber gleichfalls das △ AST (nach §. 58. No. 2) = der Hälfte von 𝔄, und das △ BDS = der Hälfte von 𝔇, mithin

$$\frac{\mathfrak{D}}{2} = \frac{\mathfrak{A}}{2} \text{ und } \mathfrak{D} = \mathfrak{A}.$$

Also

$$\underbrace{\mathfrak{C} + \mathfrak{D}}_{\text{Summe der Quadrate beyder Catheten.}} = \underbrace{\mathfrak{B} + \mathfrak{A}}_{\text{Quadrat der Hypotenuse.}}$$

§. 60.

Zwey Raumgrößen sind, nach §. 10. No. 5, ähnlich, wenn sie sich blos als Größen, hingegen in keiner andern Hinsicht (den Ort ausgenommen) unterscheiden lassen. Dieß ist nun zwar bey je 2 geraden Linien der Fall; hat man aber 2 Paare von geraden Linien (Fig. 76 und 77.), welche mit ihren Endpunkten so zusammenstoßen, daß sie sich verlängert durchkreuzen würden, d. h. die einen Winkel mit einander machen, so wird das eine Paar Linien (Fig. 76.) dem andern Paar (Fig. 77.) nur dann ähnlich seyn, wenn

1) in beyden Paaren die Linien einerley Lage gegen einander haben, d. h. wenn der $\angle x = $ dem $\angle y$,

2) und wenn noch überdieß die kleinere Linie AC beym ersten Paar eben so oft in der zu ihr gehörigen größern Linie AB enthalten ist, als die kleinere Linie ac beym zweyten Paar in der zu ihr gehörigen größern Linie ab, z. B. in beyden Paaren die kleinere in der größern $2\frac{4}{7}$ mal. Ohne eine oder die andere jener 2 Voraussetzungen würden die beyden Linienpaare von einander unterschieden werden können, ohne daß man nöthig hätte, auf die verschiedene Größe der Linien, darauf, daß ac kleiner als AC, und AB größer als ab ist, zu sehen, d. h. jene Linienpaare würden unähnlich seyn.

Im Fall, daß beym ersten Paar AC = AB wäre, müßte daher auch beym 2ten Paar ac = ab seyn.

Dem bisherigen zu Folge werden also irgend 2 geradlinigte Flächenfiguren, z. B. DECBA (Fig. 78.) und decba (Fig. 79.) ähnlich seyn,

1) wenn sie gleich viele Seiten haben,

2) wenn die in der Ordnung auf einander folgenden Winkel der einen, die Winkel bey D, E, C, B, und A den in derselben Ordnung auf einander folgenden Winkeln der andern bey d, e, c, b und a einzeln genommen gleich,

3) und wenn endlich je zwey benachbarte Seiten der einen, z. B. DE und EC, welche den Winkel bey E einschließen, denjenigen benachbarten Seiten der andern, welche Schenkel des gleichen Winkels bey e sind, nach der obigen Erklärung ähnlich, d. h. wenn die kleinern Seiten bey beyden Figuren gleich vielmal in den ihnen benachbarten größern enthalten sind. *) Sollten aber die benachbarten Seiten in der größern Figur gleich seyn, so müssen es natürlich auch die den gleichen Winkel einschließenden Seiten in der kleinern seyn.

Solche Seiten, DE, EC und de, ec, welche in ähnlichen Figuren gleiche Winkel nach einerley Lage einschliessen, werden **gleichnamigte Seiten** genannt. Es ist nemlich DE mit de und EC mit ec gleichnamigt.

---

*) Sind die kleinern Seiten in den ihnen benachbarten größern gleichvielmal enthalten, so sind es auch die größern in den kleinern; nur ist alsdann der gemeinschaftliche Quotient keine ganze Zahl, sondern ein eigentlicher Bruch.

§. 61.

In diesem §, kommen wir zu 3 Sätzen, auf welchen die ganze Lehre von der bloßen Aehnlichkeit der Dreyecke beruht, und die daher vorzügliche Aufmerksamkeit verdienen.

1) Wenn in einem △ ABC (Fig. 75.) eine Seite AB in beliebig viele gleiche Theile, Ba, ad ꝛc. getheilt, und durch jedes Theilpunkt mit der Seite *AC* eine Parallele ab, df ꝛc. gezogen wird; so wird dadurch auch die Linie BC in eben so viele gleiche Theile Bb, bf ꝛc. getheilt.

Man ziehe, nachdem die Parallelen ab, df ꝛc. gezogen sind, durch die Theilpunkte a, d ꝛc. auch mit BC die Parallelen ae, dg ꝛc. so entstehen dadurch eben so viele kleine △△, als die Linie *AB* Theile hat. Diese kleinen △△ Bab, ade ꝛc. sind übereinkommende △△, denn, da Ba = ad, der ∠ aBb = dem ∠ dae, und der Winkel Bab = dem ∠ ade (§. 52. No. 1.), so müssen sich, nach (§. 49. No. 6), die Dreyecke Bab und ade decken, und da der nemliche Beweis auch bey je 2 andern jener kleinen △△ Statt findet, so sind sie alle übereinkommende △△.

Es ist daher ae = Bb, aber auch, nach §. 52. No. 9, ae = bf, folglich auch Bb = bf, und ganz ebenso kann die Gleichheit aller übrigen Theile von BC erwiesen werden.

2) Wird in dem △ ABC (Fig. 75.) mit irgend

einer Seite, z. B. mit AC in beliebiger Entfernung eine Parallele DE gezogen, so, daß sie die zwey Seiten AB und BC in G und H schneidet; so wird, unter der Voraussetzung, daß AB kleiner als BC, das Stück BG eben so oft in BH, und das Stück AG eben so oft in CH enthalten seyn, als AB in BC.

Man denke sich AB abermals in mehrere gleiche Theile getheilt, und durch die Theilpunkte mit AC Parallelen gezogen; so wird, wenn die Theile klein genug sind, die Parallele DE mit einer jener Parallelen zusammenfallen. Dieß ist in der Figur, wo AB in 6 gleiche Theile getheilt ist, bey der zweyten Parallele von unten der Fall. Wenn nun AB in BC z. B. 2 mal enthalten ist, so wird auch der 6te Theil von AB, d i. Ba im 6ten Theil von BC, d. i., nach No. 1) in Bb eben so oft enthalten seyn, indem ja Dividende und Divisor oder der Zähler und Nenner eines Bruchs mit einerley Zahl (hier mit 6) dividirt werden können, ohne daß dadurch der Quotient, oder der Werth des Bruchs geändert wird. (Z. L. §. 119 No. 5) Ist aber Ba in Bb zweymal enthalten, so wird auch das Vierfache von Ba, d. i. BG, im Vierfachen von Bb, d. i., nach No. 1, in BH, und das Zweyfache von Ba, d. i. AG, im Zweyfachen von Bb, d. i. nach No. 1, in CH, ebenfalls 2 mal enthalten seyn, indem ja auch Dividende und Divisor, oder der Zähler und Nenner eines Bruchs mit einerley Zahl (hier mit 4 und mit 2) multiplizirt werden können, ohne daß dadurch der Quotient oder der Werth des Bruchs geändert wird (Z. L. §. 119. No. 5.)

Wäre AB = BC, so ließe sich auf die nemliche Art zeigen, daß alsdann auch BG = BH und AG = CH seyn müsse.

3) Kehren wir den vorigen 2ten Satz um, so ergibt sich der 3te. Er heißt

Wenn 2 Seiten eines Dreyecks ABC (Fig. 80) durch eine gerade Linie DE in G und H so geschnitten werden, daß (wenn AB kleiner als BC) BG in BH oder AG in CH eben so oft enthalten ist, als AB in BC; so ist DE mit AC parallel.

Wäre DE mit AC nicht parallel, so müßte eine mit AC durch das Punkt G gezogene Parallele die Seite BC entweder ober= oder unterhalb H, z. B. in L oder in O schneiden. Wir wollen das erstere annehmen, also voraussetzen, die Linie IK sey mit AC parallel; so ist, nach dem 2ten Satz, BG in BL und AG in CL eben so oft enthalten, als AB in BC. Da nun aber, laut der Bedingung, BG in BH und AG in CH eben so oft als AB in BC enthalten ist, so müßte, wenn IK parallel mit AC wäre, BG in BL und BH, deßgleichen AG in CL und CH gleich vielmal enthalten seyn, was sich, da BL kleiner als BH, und CL größer als CH ist, offenbar widerspricht. Auf den nemlichen Widerspruch stößt man, wenn man annimmt, daß eine mit AC durch G gezogene Parallele die Seite BC unterhalb H z. B. in O schneide; und folglich kann nur H der wahre Durchschnittspunkt einer durch G mit AC parallel liegenden Linie, d. i. DE muß diese Linie seyn.

Wären AB und BC gleich, und würden diese beyden Seiten von der Linie DE so geschnitten, daß BG = BH oder AG = CH wäre, so würde aus den nemlichen Gründen DE gleichfalls mit AC parallel laufen.

§. 62.

Sechs Hauptsätze von der Aehnlichkeit der Dreyecke.

1) **Zwey ungleichseitige Dreyecke sind ähnlich, wenn in beyden jede kleinere Seite in der ihr benachbarten größern, in sofern sie in der nemlichen Ordnung genommen werden, gleich vielmal enthalten ist.**

Es sey (Fig. 81.) in den beyden △△ ACB und acb die Seite CA in der Seite AB eben so oft als ca in ab, ferner CA in CB eben so oft als ca in cb, und CB in AB eben so oft als cb in ab enthalten; so werden diese △△ ähnlich, d. h. es werden auch die von gleichnamigten Seiten eingeschlossene

Winkel in beyden △△ gleich, r = r, x = m und y = n seyn.

Trage ab auf die gleichnamigte Seite AB von A nach D, und ziehe durch D mit CB die Parallele ED; so ist, nach §. 61. No. 2, EA in AD so oft, als CA in AB, mithin, nach obiger Voraussetzung, eben so oft, als ca in ab enthalten. Da aber AD = ab, so muß auch EA = ca seyn, sonst könnte es in AD nicht eben so oft, als ca in ab enthalten seyn.

Ziehe ferner durch D mit AC die Parallele DF, so ist, nach §. 61. Nro. 2, CF so vielmal in AD, als CB in AB, d. i. laut der Bedingung der Aufgabe, so vielmal als cb in ab enthalten.

Da nun abermals AD = ab ist, so muß auch CF = cb, und da CF, nach §. 52 Nro. 9. = ED, auch ED = cb seyn.

Die beyden △△ ADE und abc sind daher, da ihre Seiten einzeln genommen gleich sind, nach §. 49 Nro. 1, übereinkommende △△, und es ist r = r, m = m und n = n. Nach §. 52. Nro. 1, ist aber m = x und n = y, folglich auch x = m und y = n.

Anwendung dieses Satzes auf gleichschenklichte und gleichseitige ähnliche △△. Alle gleichseitigen △△ sind ähnlich, 2 gleichschenklichte aber sind es nur dann, wenn in beyden die ungleiche Seite in einer der beyden gleichen Seiten gleich vielmal enthalten ist.

2) Zwey ungleichseitige Dreyecke sind ähnlich, wenn sie einen gleichen Winkel haben, und von den 2 Seiten, welche diesen gleichen ∠ einschließen, bey beyden △△ die kleinere in der ihr benachbarten größern gleich vielmal enthalten ist.

Es sey (Fig. 81.) in den △△ ACB und acb der ∠ r = dem ∠ r, uod CA in AB eben so oft, als ca in ab enthalten; so werden diese zwey Dreyecke ähnlich, d. h. es wird auch der ∠ x = dem ∠ m, der ∠ y = dem ∠ n, ferner CA in CB eben so oft, als ca in cb, und CB in AB so oft, als cb in ab enthalten seyn.

Trage ab auf die gleichnamigte Seite AB von A nach D, und ca auf die gleichnamigte Seite CA von A nach E; so ist, wenn ED gezogen wird, nach §. 49. Nro. 2, das △ ADE übereinkommend mit dem △ abc, und folglich der Winkel m = dem ∠ m, der ∠ n = dem ∠ n, und CA so oft in AB, als EA in AD enthalten. Aus dem letztern erhellt ferner, nach §. 61. Nro. 3, daß ED parallel mit CB, mithin auch der ∠ x = dem ∠ m, und der ∠ y = dem ∠ n sey. Da nun so eben gezeigt wurde, daß m = m und n = n ist, so ist auch x = m, und y = n.

Nun ziehe man durch E mit AB die Parallele EG, so ist CA in CB so oft, als EA in GB (§. 61. Nro. 2.) und da EA == ca, und GB == ED (§. 52. Nro. 9.) ED aber == cb, so ist auch CA in CB so oft, als ca in cb enthalten.

Wird endlich, wie im vorigen Fall, durch D mit AC die Parallele DF gezogen, so muß wiederum CB in AB so oft, als CF == ED == cb in AD == ab enthalten seyn.

Anwendung dieses Satzes auf gleichschenklichte und und gleichseitige ähnliche △△. Bey beyden muß CA == AB und ca = ab, bey jenen der eingeschlossene Winkel größer oder kleiner als 60°, bey diesen aber == 60° seyn. Es können jedoch die den gleichen ∠ einschließenden Seiten CA und AB, deßgleichen ca und ab auch ungleich, und die Dreyecke demungeachtet gleichschenklicht seyn; nur liegen alsdann, die von jenen Seiten eingeschlossene gleiche Winkel r und r der ungleichen Seite nicht gegenüber, sondern an derselben an, und müssen auch in diesem Fall größer oder kleiner als 60° seyn.

3) Zwey ungleichseitige rechtwinklichte △△ sind ähnlich, wenn in beyden einer der 2 Catheten in der Hypotenuse gleich vielmal enthalten ist.

Es sey (Fig. 82.) in den zwey rechtwinklichten △△ ABC und abc der Cathetus BA in der Hyponenuse BC eben so oft, als ba in bc enthalten; so sind die $\triangle\triangle$ ähnlich, d. h. es ist der $\angle$ x = dem $\angle$ r, der $\angle$ m = dem $\angle$ m, ferner BA in AC so oft, als ba in ac, und AC in BC so oft, als ac in bc enthalten.

Trage ba auf den gleichnamigten Cathetus BA von B nach D, und ziehe durch D mit AC die Linie DE parallel; so muß nach §. 61 Nro. 2, BD in BE so oft, als BA in BC, d. i. nach obiger Voraussetzung, so oft, als ba in bc enthalten seyn. Da nun aber BD und ba gleich sind, so muß auch BE = bc seyn, und die rechtwinklichten $\triangle\triangle$ BDE und bac sind mithin, nach §. 49. Nro. 3, übereinkommend. Folglich m = m, r = r, und da r = x, auch x = r, und DE = ac.

Wird nun durch D mit BC die Parallele DF, und durch E mit BA die Parallele EG gezogen; so ist, nach §. 61 Nro. 2, BA in AC so oft, als BD = ba in CF = DE = ac, und AC in CB so oft, als AG = DE = ac in BE = bc enthalten.

Anwendung hiervon auf ähnliche $\triangle\triangle$, welche rechtwinklicht und zugleich gleichschenklicht sind.

4) Auch 2 stumpfwinklichte ungleichseitige $\triangle\triangle$ sind ähnlich, wenn der stumpfe $\angle$ in einem = dem stumpfen $\angle$ im andern, und in beyden ein Schenkel des stumpfen

Winkels in der ihm gegenüber liegenden längsten Seite gleich vielmal enthalten ist.

Es sey (Fig. 83.) in den △△ ADF und adf der ∠ x = dem ∠ n, und FA in FD so oft enthalten, als fa in fd; so sind die △△ ähnlich, d. h. es ist auch der ∠ i = dem ∠ i, der ∠ y = dem ∠ r, und FA in AD so oft, als fa in ad, deßgleichen AD in FD so oft, als ad in fd enthalten.

Trage fa auf die gleichnamigte Seite FA von F nach C, und ziehe mit AD durch das Punkt C die Parallele CE; so ist der ∠ n (da er = dem ∠ x) = dem ∠ n, aber auch, nach §. 61. Nro. 2, FA in FD so oft, als FC in FE enthalten, d. h. es ist, da FC = fa, auch FE = fd. Es sind mithin, nach §. 49. Nro. 4, die △△ CEF und adf übereinkommend, der ∠ i = dem ∠ i, der ∠ r und der ihm gleiche ∠ y = dem ∠ r, und CE = ad.

Auch ist, wenn durch C mit FD die Linie CM, und durch E mit FA die Linie EN parallel gezogen wird, nach §. 61. Nro. 2, FA in AD so oft, als FC = fa in DM = CE = ad, und AD in FD so oft, als AN = CE = ad in FE = fd enthalten.

Anwendung auf ähnliche Dreyecke, welche stumpfwinklicht und gleichschenklicht zugleich sind.

5) Eben so sind 2 ungleichseitige △△ ähnlich, wenn ein spitziger ∠ in einem = einem spitzigen ∠ im andern, und in beyden entweder ein Schenkel dieses gleichen Winkels in der dem ∠ gegenüberliegenden Seite, oder, wenn diese kleiner als jener seyn sollte, die dem ∠ gegenüberliegende Seite in einem Schenkel desselben gleichvielmal enthalten ist, jedoch im letztern Fall nur unter der Voraussetzung, daß auch der jenem Schenkel gegenüberliegende ∠ in beyden △△ von einerley Art sey.

Ist die gegenüberliegende Seite größer als der Schenkel, so ist der Beweis ganz der nemliche wie in Nro. 3 und 4. Anwendung auf gleichseitige und gleichschenklichte ähnliche △△. Sind nemlich der Schenkel und die gegenüberstehende Seite gleich, und der gleiche spitze ∠ = 60°, so sind die beyden ähnlichen △△ gleichseitig, hingegen blos gleichschenklicht, wenn jener ∠ größer oder kleiner als 60° ist. Aber auch hier ist es möglich, daß die gegenüberliegende Seite größer ist, und die △△ dennoch gleichschenklicht sind; nur ist alsdann nicht die noch übrige 3te Seite, sondern entweder die gegenüberstehende Seite oder der Schenkel des gleichen ∠ die ungleiche Seite des gleichschenklichten Dreyecks, und der gleiche spitzige ∠ wird immer größer als 60° seyn.

Wenn hingegen die dem gleichen Winkel gegenüberliegende Seite kleiner als der Schenkel, und zugleich die Art des diesem Schenkel gegenüberstehenden Winkels bestimmt ist, daß er nemlich in beyden △△ ein rechter, oder in beyden spitzig, oder in beyden stumpf sey; so erhellt die Wahrheit des obigen Satzes auf folgende Art:

Wäre es bestimmt, daß der dem Schenkel des gleichen ∠ gegenüberliegende Winkel in beyden △△ ein rechter sey; so hätte man gar nicht nöthig, auf die Gleichheit des gegebenen spitzigen Winkels zu achten, sondern der Fall käme mit dem in Nro. 3 vollkommen überein.

Ist es hingegen bestimmt, daß jener ∠ in beyden △△ schief, und zwar entweder in beyden spitzig oder in beyden stumpf sey, ist z. B. (Fig. 84.) der ∠ r im größern △ = dem ∠ r im kleinern, die dem ∠ r gegenüberstehende Seite eben so oft in dem Schenkel SB, als die dem ∠ r gegenüberstehende Seite in dem Schenkel sb enthalten, und sind endlich auch die den Schenkeln SB und sb gegenüberliegende Winkel in beyden △△ stumpf; so weißt man gewiß, daß die △△ SAB und sab und nicht die △△ SAB und scb oder SCB und sab gemeint sind. Leicht läßt es sich nun zeigen, daß jene △△ ähnlich seyn müssen, d. h. daß auch der ∠ x = dem ∠ n, der ∠ y = dem ∠ m, aber auch AB in SB so oft, als ab in sb, und SA in AB so oft, als sa in ab enthalten sey.

Man trage zu diesem Ende sb auf den gleichnamigten Schenkel SB von B nach H, und ziehe durch H sowohl mit SA als mit AB die Parallelen HK und HI; so ist SA in SB, nach §. 61. Nro. 3, so oft, als IA = HK in HB enthalten, folglich da HB = sb, auch HK = sa.

Demnach sind die △△ HKB und sab, nach §. 49. Nro. 5, übereinkommend, der ∠ m = dem ∠ m, der ∠ n = dem ∠ n und auch KB = ab.

Nun ist aber AB in SB so oft, als KB = ab in HB = sb, und, wenn durch K mit SB noch die Parallele LK gezogen wird, auch SA in AB so oft, als SL = HK = sa in KB = ab enthalten.

Auch in diesem Fall können die △△ gleichschenklicht seyn; nur werden auch hier wieder entweder die gegenüberstehende Seite oder der Schenkel desgleichen Winkels die ungleiche Seite ausmachen, und der gleiche spitzige ∠ immer kleiner als 60° seyn.

6) Endlich sind 2 ungleichseitige △△ auch dann ähnlich, wenn 2 Winkel in einem, zweyen Winkeln im andern, einzeln genommen gleich sind, und mithin auch der 3te Winkel in beyden △△ gleich ist.

Es sey (Fig. 81.) in den beyden △△ ACB und acb der ∠ r = dem ∠ r, der ∠ y = dem ∠ n, und der ∠ x = dem ∠ m; so sind die

△△

△ △ ähnlich, d. h. es ist auch CA in AB so oft, als ca in ab, ferner CA in CB so oft, als ca in cb, und CB in AB so oft, als cb in ab enthalten.

Trage die Seite ab auf die Seite AB, welche zwischen den Winkeln r = r und y = n liegt, von A nach D, ziehe durch D mit CB die Linie ED; aber auch mit CA die Linie DF, und endlich durch E mit AB die Linie EG parallel; so ist, da der ∠ n = dem ∠ y, und dieser = dem ∠ n, auch n = n, und folglich sind, da r ohnehin = r, die △△ ADE und abc, nach §. 49. Nro. 6, übereinkommend, mithin auch EA = ca und ED = cb. Nun ist aber, nach §. 61 Nro. 2, CA in AB so oft, als EA = ca in AD = ab, ferner CA in CB so oft, als EA = ca in GB = ED = cb, und CB in AB so oft, als CF = ED = cb in AD = ab enthalten.

Anwendung auf gleichseitige und gleichschenklichte ähnliche △△. Bey jenen ist in jedem △ jeder ∠ = 60°, bey diesen sind in jedem △ nur 2 gleiche Winkel, und haben in einem wie im andern △ entweder gleichviel über oder gleichviel unter 60° zu ihrem Maaß.

§. 63.

Einige nächste Folgerungen aus den zwey vorhergehenden §. §.

1) Da jedesmal, wenn in einem △ ABC (Fig. 75.)

mit irgend einer Seite AC eine Parallele GH gezogen wird, die Winkel des abgeschnittenen △ BGH, einzeln genommen, den Winkeln des ganzen △ ABC, einzeln genommen, gleich sind; so sind, nach §. 62. Nro. 6, jene △△ ähnlich, und daher ist nicht nur (was schon in §. 61. Nro. 2. erwiesen wurde) BG in BH so oft, als AB in BC, sondern überhaupt jede kleinere Seite in der ihr benachbarten größern, in sofern sie in beyden △ △ in der nemlichen Ordnung genommen werden, gleich vielmal enthalten.

2) Wenden wir das so eben Gesagte auf den vollkommenen verjüngten Maaßstab an, den wir im §. 44. kennen gelernt haben, so wird sich dadurch die Richtigkeit desselben sehr leicht darthun lassen. Es muß nemlich (Fig. 25.) bewiesen werden, daß das zwischen den Linien BF und BE liegende Stückchen der ersten Parallele d. i. der Parallele 1 —— 1 gerade $\frac{1}{10}$ von EF sey. Da nun das durch die Parallele abgeschnittene sehr kleine △ dem ganzen △ BEF ähnlich ist, so muß jenes kleine Stückchen als die eine Seite des abgeschnittenen Dreyecks, in der Weite der Parallelen, als der andern Seite desselben, eben so oft enthalten seyn, als die gleichnamigte Seite EF in der gleichnamigten Seite BF. Es ist aber die Weite der Parallelen $\frac{1}{10}$ von BF, und folglich muß auch jenes kleine Stückchen $\frac{1}{10}$ von EF seyn, indem, wenn 2 Quotienten gleich sind, und die erste Dividende nur $\frac{1}{10}$ von der zweyten ist, auch der erste Divisor nur $\frac{1}{10}$ vom zweyten Divisor seyn kann. Eben so läßt es sich zeigen, daß das Stückchen der zweyten Paral-

lele $\frac{2}{10}$, das Stückchen der dritten $\frac{3}{10}$ ꝛc. von EF seyn muß; auch ersieht man hieraus, daß BF oder die Breite des Maaßstabs nach Willkühr kann genommen werden, und daß es nicht gerade nöthig, jedoch in den meisten Fällen am schicklichsten sey, diese Breite = AB zu machen.

3) Setzt man (Fig. 85.) 4 Liniale AC, CE, BF und DF so zusammen, daß sie in den Punkten B, C, D und F verschiebbar sind, BC = DF, CD = BF, also BC mit DF, CD mit BF parallel ist, und die Punkte A, F und E in Einer geraden Linie liegen; so hat man das Wesentlichste eines Instrumentes, dem, einer entfernten Aehnlichkeit wegen, der Name Storchschnabel beygelegt worden ist. Schon der erste Anblick der Figur zeigt, daß, sobald man sich die Linie AE gezogen denkt, dieses Instrument ein △ ACE vorstelle, mit dessen einer Seite CE eine Parallele BF gezogen ist.

Diese Linie BF bleibt mit CE stets parallel, man mag die Liniale verschieben, wie man will, und folglich sind die △△ ACE und ABF ähnliche △ △. Bringt man nun in E ein spitziges Stift zum Einstecken in den Tisch, worauf gezeichnet wird, in F ein Bleystift, in A ein etwas abgerundetes Stift zum Nachfahren und in B, C und D drey unten ganz runde und glatte Füße an, welche mit jenen 3 Stiften gleiche Höhe haben; so wird, während man mit dem Stift A den Linien einer untergelegten Figur nachfährt, das Bleystift F auf einem untergelegten Papier eine kleinere, jener ganz ähnliche Figur beschrieben, indem jedes Punct, worauf A geführt wird, mit C und E ein Dreyeck bildet, dem das △ ABF vollkommen ähnlich ist. Brächte man das Stift zum Nachfahren in F und das Bleystift in A an, so würde, wie leicht begreiflich, abermals eine ähnliche, aber größere Figur entstehen, und diese Vergrößerung wird, so wie jene Verkleinerung, desto beträchtlicher seyn, je öfter BC in AC oder EF in AE enthalten ist.

Materie und verschiedene außerwesentliche Einrichtungen dieses Instruments; Handgriffe beym Gebrauch.

4) Soll eine gerade Linie in eine bestimmte Anzahl gleicher Theile getheilt werden, so geschieht dieß

a) auf dem Papier

a) durch Probiren, wobey es jedoch rathsam ist, die zu theilende Linie auf ein besonderes Blatt zu tragen, weil sonst die saubere Zeichnung durch das wiederholte Aufsetzen des Zirkels leicht verdorben wird. Mancherley kleine Vortheile hierbey.

b) Trage (Fig. 86.) die in z. B. 5 gleiche Theile zu theilende Linie AB auf ein Nebenblatt, ziehe eine andere Linie AM von unbestimmter Länge, ungefähr unter einem Winkel von 45°, in A mit AB zusammen, öffne den Zirkel nach dem Augenmaaß auf $\frac{1}{5}$ von AB, und trage diese Weite von A nach C, von C nach D, von D nach E, von E nach F und von F nach G. Werden nun G und B durch eine gerade Linie verbunden, und durch die Punkte F, E, D und C mit GB die Parallelen FH, EI ꝛc. gezogen, so erhält man die Punkte H, I, K, und L, welche die verlangte Theilpunkte sind. (§. 61. Nro. 1.) Zeichnung verjüngter Maaßstäbe.

b) auf dem Felde.

Hier geschieht die Theilung am schnellsten und sichersten, wenn man die zu theilende Linie genau mißt, mit der Anzahl der gleichen Theile in das Maaß derselben dividirt, und die im Quotienten erhaltene Länge Eines Theils mit der Meßruthe so oft aufträgt, als es die Anzahl der Theile erfordert. Der letzte Theil muß, wenn nicht gefehlt worden ist, mit dem Endpunkt der Linie zusammentreffen.

5) Zuweilen kommt auch die Aufgabe vor: Eine gerade Linie in eine bestimmte Anzahl ungleicher Theile zu theilen. Hier ist

a) entweder in der Aufgabe die Größe eines jeden Theils als ein Bruch von der ganzen Linie ausgedruckt, z. B. wenn es hieße: Der 1te Theil soll $\frac{3}{15}$ der 2te $\frac{4}{15}$ und der 3te $\frac{8}{15}$ der Linie seyn.

Hier wird sowohl auf dem Papier als auf dem Felde die vorgegebene Linie nach der vorigen Aufgabe in 15 gleiche Theile getheilt, und das 3te und 7te Theilpunkt bemerkt; so ist geschehen, was man verlangte. Gesetzt die zu theilende Linie auf dem Felde sey 75° lang, so ist $\frac{1}{15}$ von ihr $= 5°$, folglich

$$\frac{3}{15} = 15°$$
$$\frac{4}{15} = 20°$$
$$\frac{8}{15} = 40°$$
$$\text{zusammen } 75°$$

Es müssen folglich zuerst 15°, dann 20° abgemessen werden, und der Rest der Linie muß noch 40° lang seyn. Hätten die Brüche nicht gleiche Nenner, so werden sie zu gleicher Benennung gebracht, wo sodann, wenn sie addirt werden, ihre Summe ein Scheinbruch, d. h. $= 1$ seyn muß.

b) Oder man verlangt, daß jeder Theil der Linie, der 1te, 2te, 3te ꝛc. eben so oft in der ganzen Linie enthalten sey, als der 1te, 2te, 3te, ꝛc. Theil einer andern, schon getheilten, und zwar größern oder kleinern Linie in der ganzen enthalten ist. Dieß geschieht

a) auf dem Papier, wenn man (Fig. 87.) die zu theilende Linie CD auf ein besonderes Blatt trägt, so daß AD = CD, an dieselbe, unter einem

Winkel von ungefähr 45°, die andere schon getheilte Linie AB anlegt, und endlich durch die Theilpunkte F und E mit BD die Parallelen FG und EH zieht. Denn da, nach §. 61 Nro. 2, z. B. GD in FB eben so oft, als AD in AB enthalten ist, so muß auch GD in AD eben so oft, als FB in AB enthalten seyn, indem bey zwey gleichen Quotienten der kleinere Divisor im größern eben so oft, als die kleinere Dividende in der größern enthalten ist. Der nemliche Beweis findet auch bey HG und AH statt.

b) Auf dem Felde wird sowohl die getheilte Linie als auch jeder ihrer Theile gemessen, und mit dem Maaß der letztern in's Maaß der erstern dividirt. Man erhält hierdurch in den Quotienten die Nenner derjenigen Brüche, deren Zähler 1 ist, und durch die alle Theile ausgedruckt sind, in sofern man die ganze Linie als 1 betrachtet. Gesetzt, die bereits getheilte Linie seye 20° lang, der 1te Theil = 5°, der 2te = 7°, und der 3te = 8°; so ist der Bruch des 1ten Theils = $\frac{1}{4}$, der Bruch des 2ten = $\frac{1}{2\frac{6}{7}} = \frac{1}{\frac{20}{7}} = \frac{7}{20}$, und der Bruch des 3ten Theils $= \frac{1}{2\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{5}{2}} = \frac{2}{5}$ (Z. L. §. 139.) Werden diese Brüche zu gleicher Benennung gebracht, so erhält man $\frac{5}{20}$, $\frac{7}{20}$ und $\frac{8}{20}$, welche zusammen $\frac{20}{20} = 1$ geben. Man sieht hieraus, daß jene Brüche auf noch kürzerem Wege erhalten werden, wenn man das Maaß eines jeden Theils und das der ganzen Linie auf Eine Sorte bringt, und der Zahl des erstern die Zahl des letztern als Nenner unterschreibt. Nunmehr wird verfahren wie im Fall sub lit. a, d. i. die zu theilende Linie wird gemessen, in 20 gleiche Theile getheilt, und das 5te und 12te Theilpunkt bemerkt; so ist auch hier geschehen, was man verlangte. Wir wollen annehmen, die Linie, die getheilt werden soll, sey 64° lang, so ist $\frac{1}{20}$ von ihr $= 3\frac{1}{5}°$, folglich

$$\frac{5}{20} = 16°$$
$$\frac{7}{20} = 22\frac{2}{5}$$
$$\frac{8}{20} = 25\frac{3}{5}$$

zusammen 64°

Werden demnach zuerst 16°, dann $22\frac{2}{5}°$ an der zu theilenden Linie abgemessen, so muß der Rest der Linie, als der 3te Theil, noch $25\frac{3}{5}°$ groß seyn.

6) Soll (Fig. 88.) durch einen Wald von A nach B eine gerade Linie abgesteckt werden, so ist dieses auf die gewöhnliche Art, wegen der gehinderten Aussicht nicht möglich. Man stecke daher aufs Gerathewohl eine Linie *AO* nach der Gegend von B hin ab, so wird diese in den meisten Fällen an B vorbeygehen, also mit der zu ziehenden Linie *AB* einen ∠ machen.

Fällt man nun vermittelst der Kreuzscheibe auf AO von B das Perpendikel BN, und denkt sich von den Punkten M, L, K, I, und H Perpendikel bis an die zu ziehende Linie AB errichtet, so sind die △△ AMC, ALD ꝛc. alle dem △ ANB ähnlich, und so oft BN in AN enthalten ist, so oft ist auch CM in AM, DL in AL ꝛc. enthalten. Man messe daher BN und AN, und suche den Quotienten; man messe ferner AM, AL ꝛc. und dividire mit jenem Quotienten in jede dieser Linien, so erhält man das Maaß der Perpendikel CM, DL ꝛc. indem ja, wenn in die Dividende mit dem Quotienten dividirt wird, der Divisor herauskommen muß. *) Nunmehr werden jene Perpendikel wirklich mittelst der Kreuzscheibe abgesteckt, und jeder so lang gemacht, als er in der Rechnung gefunden wurde, so ergeben sich die Punkte C, D ꝛc. in der Linie AB, d. h. diese Linie ist abgesteckt. Uebrigens versteht es sich von selbst, daß die Winkel ANB, AMC ꝛc. nicht gerade rechte, sondern nur überhaupt gleiche ∠ ∠ seyn müssen.

7) Wird in einem rechtwinklichten △ ABC (Fig. 89.) vom Scheitel des rechten Winkels C auf die Hypotenuse AB eine Perpendikel CD gefällt; so entstehen 2 rechtwinklichte △ △ ACD und BCD, von wel-

*) Verschiedene andere Arten dieser Berechnung nach § 77. der Zahlenlehre.

chen jedes dem ganzen △ ACB, und daher auch jedes dem andern ähnlich ist.

In den 2 △ △ ACD und ACB ist der rechte ∠ bey D = dem rechten ∠ bey C, und der ∠ x beyden △ △ gemeinschaftlich, folglich, nach §. 62 Nro. 6, das △ ACD ∽ dem △ ACB.

Eben so ist in den 2 △ △ BCD und ACB der rechte ∠ bey D = dem rechten ∠ bey C, und der ∠ x beyden gemeinschaftlich, folglich abermals, nach §. 62. Nro. 6, das △ BCD ∽ dem △ ACB.

Daher auch das △ ACD ∽ dem △ BCD, weil sie beyde dem △ ACB ähnlich sind.

§. 64.

Soll ein einem andern Dreyeck ähnlicher Triangel gebildet werden, so gibt es, wie im §. 53, so auch hier folgende 2 Hauptfälle.

Entweder liegt das Original, d. i. dasjenige △, welchem das zu bildende ähnlich werden soll, auf dem Papier gezeichnet, oder auf dem Felde abgesteckt vor unsern Augen, und zwar so, daß man daran messen kann, was man will; oder es sind blos hinlänglich bestimmende Stücke desselben gegeben.

Erster Hauptfall.

1) Wenn das Original auf dem Papier gezeichnet ist, und das zu bildende △ ebenfalls auf Papier gezeichnet werden soll.

Erste Art. Es sey (Fig. 81.) das △ ACB das vorgegebene △. Es soll ein anderes und zwar kleineres △ acb, das jenem ähnlich sey, gezeichnet werden.

Ziehe eine Linie ab von beliebiger Länge, jedoch so, daß sie kleiner als AB sey; trage darauf in a den ∠ r und in b den ∠ y, so, daß r = r und n = y, und ziehe ac und bc, bis sie in c zusammenstoßen, so ist das △ acb, nach §. 62 Nro. 6, ähnlich dem △ ACB.

Auf die nemliche Art würde man verfahren, wenn das △ acb das vorgegebene △ wäre, und das zu zeichnende △ ACB überhaupt größer werden sollte.

Zweyte Art. Allein selten will man nur überhaupt ein kleineres oder größeres, dem vorgegebenen ähnliches △ haben, sondern meistens ist es bestimmt, um wie vielmal jede Seite des zu bildenden Dreyecks kleiner oder größer als die gleichnamigte Seite des vorgegebenen werden soll.

Gesetzt, es würde gefordert, daß (Fig 81.) jede Seite des zu zeichnenden ähnlichen Dreyecks acb. gerade $\frac{1}{3}$ von jeder gleichnamigten Seite des vorgegebenen △ ACB werden sollte; so könnte man zwar AB in 3 gleiche Theile theilen, die Linie ab $= \frac{1}{3}$ von AB machen, und übrigens ganz so, wie oben verfahren.

Dritte Art. Oder man könnte auch (weil weniger gefehlt wird, wenn man sich zur Bildung der Dreyecke blos der Seiten und keiner Winkel bedient) nicht nur AB sondern auch AC und BC in 3 gleiche Theile theilen, und, nachdem ab gezogen worden, mit dem dritten Theil von AC aus a, und mit dem Drittel von BC aus b in c Kreuzbögen machen; so würden die △ △, nach §. 62. Nro. 1 ähnlich seyn.

Da aber bey dieser letzten Art, sobald mehrere Dreyecke vorliegen, zu denen unter gleicher Bedingung eben so viele ähnliche △ △ gezeichnet werden sollen, die Theilung der Seiten eines jeden Dreyecks überaus mühsam und weitläufig wäre; so verfertigt man sich 2 Maaßstäbe, welche jener Bedingung entsprechen, mißt die Seiten der vorgegebenen △ △ auf dem einen, und macht dann die Seiten der zu bildenden △ △ nach dem andern Maaßstab eben so lang. Wäre es z. B. bestimmt, daß jede Seite der zu bildenden kleinern △ △ $= \frac{7}{13}$ von jeder gleichnamigten Seite der vorgegebenen größern △ △ werden sollte, so müßte man sich zuerst für die größern △ △ einen schicklichen Maaßstab von beliebiger Größe verfertigen, dann die ganze Länge dieses Maaßstabes in 13 gleiche Theile theilen, und endlich für die zu bildenden kleinern △ △ einen Maaßstab zeichnen, dessen ganze Länge = 7 jener Theile wäre. Wird nun irgend eine Linie auf dem ersten Maaßstabe gemessen, und dann eben so viel Ruthen, Fuße und Zolle, als man gefunden hat, auf dem zweyten, kleinern Maaßstabe in Zirkel genommen; so hat man jederzeit $\frac{7}{13}$ jener Linie.

Man könnte zwar auch mit Einem Maaßstabe auskommen, es würde aber weder viele Mühe noch Zeit dadurch erspart werden. Die Seiten des vorliegenden Dreyecks müßten gemessen, von der Zahl des Maaßes einer jeden $\frac{7}{13}$ genommen, und endlich die Ruthen, Fuße 2c., die man dadurch für eine jede Seite erhielte, auf dem nemlichen Maaßstab in Zirkel gefaßt werden.

Wären statt einer solchen Zahl, wie $\frac{7}{13}$ in obigem Beyspiel, zwey Linien gegeben, und würde verlangt, daß jede Seite des zu bildenden Dreyecks eben so oft in jeder gleichnamigten des Originals enthalten seye, als die kleinere jener Linien in der größern enthalten ist; so könnte man entweder jene beyden Linien als gleichnamigte Theile, z. B. beyde als Eine Ruthe der zu verfertigenden 2 Maaßstäbe annehmen; oder man könnte beyde auf einerley beliebigem Maaßstabe messen, und dann durch Division eine solche Zahl, wie die $\frac{7}{13}$, finden; oder man könnte endlich auch, wenn (Fig. 90) AB und CD die 2 gegebene Linien, und das △ EFG das vorgegebeue △ ist, jene Linien unter einem beliebigem Winkel RHS mit einander verbinden, so, daß HI = AB und HM

= CD wäre. Würden nun, nachdem IM gezogen, die Seiten des Dreyeckes EFG auf HR getragen, nemlich EF von H nach P, FG von H nach L, und EG von H nach K, so könnte man durch die Punkte P, L und K mit IM die Parallelen PQ, LN und KO ziehen, und würde dadurch in den Linien HQ, HN und HO die Seiten des zu bildenden Dreyecks erhalten. (§. 63. Nro. 1.) *)

Die Anwendung des bisherigen auf die Vergrößerung vorgegebener kleinerer △ △ ist zu leicht, als daß sie einer ausführlichen Erwähnung bedürfte. Auch versteht es sich von selbst, daß die gegenwärtige Aufgabe auf die kürzeste und leichteste Art mit Hülfe eines guten, zu den nöthigen Veränderungen bequem eingerichteten Storchschnabels aufgelöst werden könne.

Statt nach Nro. 1 oder 6 des §. 62. könnte man freylich auch nach Nro. 2 ꝛc. eben dieses §. verfahren; da aber diese Verfahrensarten im 2ten Hauptfall ohnehin angeführt werden müssen; so bleiben sie hier weg, um so mehr, da die vorgetragene Art die einfachste und sicherste ist — eine Bemerkung, die auch für die folgenden Fälle in Nro. 2, 3 und 4 gelten mag.

2) Wenn das Original zwar abermals auf dem Papier

---

*) Hier kann ein Proportionalzirkel vorgewiesen, und seine Einrichtung wenigstens einigermaßen erklärt werden.

gezeichnet ist, das zu bildende △ aber auf dem Felde abgesteckt — in Grund gelegt werden soll. Hier kann man auf dreyerley Art zu Werk gehen.

Erste Art. Ohne Meßtisch und Astrolab.

Wähle in dem gezeichneten △ eine schickliche Seite zur Grundlinie, und ziehe darauf die Höhe. Diese beyde Linien, wie auch die Stücke der Grundlinie auf beyden Seiten des Perpendikels, werden auf dem zum gezeichneten △ gehörigen verjüngten Maaßstabe gemessen, die Grundlinie auf dem Felde am angewiesenen Orte abgesteckt und abgemessen, der Aufstehepunkt der Höhe bemerkt, und aus demselben mit der Kreuzscheibe das Perpendikel errichtet. Ist nun auch dieses mit der Meßruthe eben so lang gemacht worden, als man es auf dem verjüngten Maaßstab gefunden hat, so ist auch das 3te Winkelpunkt des Dreyecks bestimmt, und also geschehen, was man verlangte.

Die Aehnlichkeit der △△ erhellt hier aus §. 62. Nro, 2, denn durch das gezogene Perpendikel wurde das vorgegebene △ in 2 rechtwinklichte Dreyecke zerlegt, denen die zwey rechwinklichten Dreyecke auf dem Felde ähnlich seyn müssen, weilder eingeschlossene rechte ∠ gleich ist, und die einschließenden Seiten gleich vielmal in einander enthalten sind.

Zweyte Art. Mit dem Meßtisch.

Das vorgegebene △ wird auf den Tisch gezeichnet, und 2 Seiten desselben werden auf dem verjüngten Maaßstabe gemessen. Nachdem man nun am angewiesenen Ort den von jenen Seiten eingeschlossenen Winkel, nach §. 47, abgesteckt, und die Schenkel mit der Meßruthe so lang gemacht hat, als sie auf dem verjüngten Maaßstabe gefunden wurden; so hat man die 3 Winkelpunkte eines Dreyecks, welches dem △ auf dem Tisch, nach §. 62. Nro. 2, vollkommen ähnlich seyn wird.

Dritte Art. Mit dem Astrolab.

Auch hier werden 2 Seiten des gezeichneten Dreyecks auf dem verjüngten Maaßstabe, aber auch der von ihnen eingeschlossene Winkel mit dem Transporteur gemessen. Der letztere wird mit dem Astrolab, nach §. 47, abgesteckt, und übrigens verfahren, wie in lit. b. (§. 62. Nro. 2.)

Nunmehr sind wir auch im Stande, diejenigen Aufgaben, die in Nro. 2. des 2ten Hauptfalls im §. 53. noch nicht aufgelöst werden konnten, zu bewerkstelligen.

Soll nemlich auf dem Felde ein übereinkommendes △ aus 3 gegebenen Seiten, oder ein rechtwinklichtes aus einem Cathetus und der Hypotenuse, oder ein stumpfwinklichtes aus dem gege-

gegebenen stumpfen ∠, einem Schenkel desselben und der dem stumpfen ∠ gegenüberliegenden längsten Seite, oder endlich aus einem gegebenen spitzigen ∠, einem seiner Schenkel, der dem spitzigen ∠ gegenüberliegenden Seite, und, wenn diese kleiner als der Schenkel ist, aus der Art des jenem Schenkel gegenüberstehenden Winkels ein übereinkommendes △ gebildet werden; so löse man diese Aufgaben, nach §. 53. 2ten Hauptfall, Nro. 1, mit Hülfe eines verjüngten Maaßstabs und Transporteurs zuerst auf dem Papier auf. Hierdurch erhält man △ △, welche den auf dem Felde zu bildenden ähnlich sind, und die dann nach der einen oder andern der so eben gelehrten 3 Verfahrensarten in Grund gelegt werden können.

3) Wenn das Original auf dem Felde abgesteckt ist, und das zu bildende ähnliche △ gleichfalls auf dem Felde abgesteckt werden soll.

Hier ist es meistens durch die Umstände bestimmt, um wie vielmal jede Seite des zu bildenden Dreyecks kleiner oder größer, als jede gleichnamigte Seite des Originals werden soll.

Erste Art. Wir wollen annehmen, jede Seite des zu bildenden Dreyecks soll 3 mal kleiner, als jede gleichnamigte Seite des Originals werden. Messe 2 Seiten des letztern, stecke den von ihnen eingeschlossenen Winkel am angewiesenen Ort ab, und mache die

Schenkel desselben $= \frac{1}{3}$ von jenen gemessenen Seiten, so werden die Dreyecke, nach §. 62. Nro. 2, ähnlich seyn.

Zweyte Art. Messe nur Eine Seite des vorliegenden Dreyecks, stecke am verlangten Ort eine gerade Linie ab, mache sie $= \frac{1}{3}$ jener Seite, und trage an ihre beyden Endpunkte die Winkel auf, die im Original an der gemessenen Seite anliegen; so kann auf die im §. 53, im 1ten Hauptfall, Nro. 2 angegebene Art auch in den 3ten Winkelpunkt des Dreyecks ein Stab gesteckt werden. Daß aber hierdurch das △ dem vorliegenden ähnlich werden muß, erhellt aus §. 62. Nro. 6.

Dritte Art. Fälle auf eine zur Grundlinie angenommene Seite des vorliegenden Dreyecks mit der Kreuzscheibe ein Höhenperpendikel; messe diese 2 Linien, so wie auch die Stücke der Grundlinie, und dividire das Maaß einer jeden durch 3; so erhältst du in den Quotienten das Maaß derjenigen Linien, welche nöthig sind, um die in Nro. 2, lit. a beschriebene Absteckung des verlangten ähnlichen (im angenommenen Beyspiel dreymal kleinern) Dreyecks vorzunehmen (§. 62. Nro. 2.)

4) Wenn das Original zwar abermals auf dem Felde abgesteckt ist, das zu bildende △ aber auf dem Papier gezeichnet, oder kurz, wenn ein △ aufgenommen werden soll.

Erste Art. Ohne Meßtisch und Astrolab.

Messe die 3 Seiten des Dreyecks, und nehme ihr Maaß auf einem, der Absicht angemessenen verjüngten Maaßstab; so kannst du aus diesen verjüngten Seiten, wenn eine von ihnen aufgetragen wird, und mit den 2 andern Kreuzbögen gezogen werden, das verlangte ähnliche △ bilden (§. 62. Nro. 1.)

Zweyte Art. Mit dem Meßtisch.

Nehme einen Winkel des Dreyecks, nach §. 47, auf, messe die beyden Schenkel desselben, und mache dann die Schenkel des gezeichneten Winkels, nach dem verjüngten Maaßstab, eben so lang, so kann auch die 3te Seite des Dreyecks gezogen werden, und die △ △ werden nach §. 62. Nro. 2. ähnlich seyn.

Oder messe nur Eine Seite des Dreyecks, z. B. (Fig. 101.) Die Seite AB, trage sie, nach dem verjüngten Maaßstab, auf den Tisch, so, daß ab eben so viel Ruthen, Fuß und Zoll nach diesem Maaßstabe lang ist, als die Linie *AB* nach dem Feldmaaßstab gefunden wurde; stelle mit Hülfe des an die Gabel gehängten Senkels den Tisch so, daß a gerade über *A* kommt; orientire den Tisch (§. 47.); lege das Visirlinial an a, visire nach C, und ziehe die Visirlinie am. Wird hierauf der Tisch von *A* nach B gebracht, daselbst orientirt, von b nach C visirt, und die Visirlinie bn gezogen, so wird diese die schon gezogene Visirlinie am in c durchschneiden, und das △ abc ist, nach §. 62. Nro. 6. dem △ *A*BC ähnlich.

Oder verfahre im Anfang ganz eben so, wie bey der 2ten Art, statt aber den Tisch von *A* nach B zu bringen, trage ihn (Fig. 102.) nach C, und stelle ihn so, daß die Visirlinie ma über die Linie C*A* zu liegen kommt. Wird nun, nachdem der Tisch dergestalt orientirt ist, das Linial an b angelegt, und so lange gedreht, bis man B dadurch erblickt; so kann bc gezogen werden. Daß hierdurch das △ abc dem △ *A*BC ähnlich werden muß, erhellt gleichfalls aus §. 62. Nro. 6; denn, wenn ma über C*A* liegt, so ist ab mit *A*B parallel, indem der ∠ mab = dem ∠ C*A*B, und daher ist auch der ∠ abc = dem ∠ *A*BC.

Man nennt dieß Verfahren das Ruckwartsschneiden einer gezogenen Visirlinie. Es ist vorzüglich dann vortheilhaft, wenn C im Thale und *A* und B auf Bergen liegen; weil man dadurch der Mühe, auch den 2ten Berg B ersteigen zu müssen, überhoben wird.

Dritte Art. Mit dem Astrolab.

Messe 2 Seiten und den von ihnen eingeschlossenen Winkel. Trage diesen mit dem Transporteur aufs Papier, und mache seine Schenkel nach dem verjüngten Maaßstab so lang, als jene Seiten nach dem Feldmaaßstab gefunden wurden, so kann die 3te Seite gezogen werden. (§. 62. Nro. 2.)

Oder messe nur Eine Seite und die an ihr anliegenden 2 Winkel. Trage jene Seite nach dem verjüngten Maaßstab aufs Papier, und an ihre Endpunkte mit dem Transporteur die gemessenen Winkel, so werden ihre Schenkel gehörig verlängert, sich durchschneiden, und das verlangte ähnliche △ gezeichnet seyn. (§. 62. Nro. 6.)

Es kann auch, statt dem einen der an der gemessenen Seite anliegenden Winkel, wenn es den Umständen nach schicklicher seyn sollte, der jener Seite gegenüberstehende Winkel gemessen werden, indem dann, der nicht gemessene = 180° — der Summe der beyden gemessenen ist.

Zweyter Hauptfall.

In allen hieher gehörigen Aufgaben muß, wie in Nro. 1 und in Nro. 3 des 1ten Hauptfalls, eine Zahl gegeben seyn, welche anzeigt, um wie vielmal die Seiten der zu bildenden △ △ kleiner oder größer, als die Seiten derjenigen △ △ werden sollen, deren hinlänglich bestimmende Stücke in der Aufgabe angegeben sind. Diese Verjüngungs = und Vergrößerungszahlen (wir wollen sie in der Folge, der Kürze halber, Veränderungszahlen nennen) können aber bey Aufgaben auf dem Papier, wie im 1ten Hauptfall Nro. 1, entweder unmittelbar, oder mittelbar durch 2 Linien gegeben seyn, und sind bey Aufgaben auf dem Felde, wie in Nro. 3. des 1ten Hauptfalls, meistens durch die Umstände bestimmt.

1) Auf dem Papier.

Erste Aufgabe. Aus 3 gegebenen Seiten, von denen je zwey zusammen größer sind, als die 3te, und einer gegebenen VeränderungsZahl, ein bestimmtes ähnliches △ zu bilden. Die Auflösung ist die nemliche, die oben im 1ten Hauptfall, Nro. 1 lit. c. ausführlich beschrieben wurde.

Sind die Seiten bey dieser sowohl als bey den folgenden Aufgaben nicht als gezeichnete Linien, sondern in Längenmaaß gegeben; so muß der Aufgabe, wenn sie nicht zu den unbestimmten gehören soll, derjenige verjüngte Maaßstab beygelegt seyn, nach welchem das Maaß jener Seiten angegeben ist.

Zeichnung eines gleichseitigen aus Einer, und eines gleichschenklichten ähnlichen Dreyecks aus 2 gegebenen Linien.

Zweyte Aufgabe. Aus 2 Seiten, dem von ihnen eingeschlossenen Winkel und einer gegebenen Veränderungszahl.

Nachdem die 2 den Winkel einschließenden Seiten des zu bildenden Dreyecks aus dem Gegebenen, auf eine oder die andere der nun hinlänglich bekannten Verfahrensarten gefunden worden sind; so wird der gegebene Winkel gezeichnet, seine Schenkel = den gefundenen Seiten gemacht, und die 3te Linie des Dreyecks gezogen. (§. 62. Nro. 2.)

Dritte Aufgabe. Ein rechtwinklichtes △ aus der gegebenen Hypotenuse, einem von beyden Catheten und einer gegebenen Veränderungszahl.

Suche aus dem Gegebenen die Hypotenuse und den einen Cathetus des zu bildenden Dreyecks. Zeichne einen rechten ∠, mache einen Schenkel desselben = dem gefundenen Cathetus, nehme die gefundene Hypotenuse in Zirkel, und schneide durch einen aus dem Endpunkt jenes Catheten mit dieser Eröffnung gezogenen Bogen den andern Schenkel des rechten Winkels; so ist auch das 3te Winkelpunkt des zu bildenden Dreyecks gefunden, (§. 62. Nro. 3.)

Vierte Aufgabe. Ein stumpfwinklichtes Dreyeck aus dem stumpfen ∠, einem seiner Schenkel, der dem stumpfen ∠ gegenüberliegenden längsten Seite, und einer gegebenen Veränderungszahl.

Bestimme aus dem Gegebenen für das zu bildende △ sowohl den Schenkel des stumpfen ∠, als auch die ihm gegenüberstehende längste Seite. Zeichne den stumpfen ∠, mache den einen Schenkel desselben so lang, als er nach jener Bestimmung gefunden wurde, nehme die gefundene längste Seite, welche dem stumpfen Winkel gegenüberliegen soll, in Zirkel, und ziehe damit aus dem Endpunkt jenes Schenkels einen Bogen, so, daß er den andern von unbestimmter Länge gezogenen Schenkel durchschneidet; so ist, wenn jene längste Seite wirklich gezogen wird, das verlangte ähnliche △ gebildet (§. 62. Nro. 4).

Fünfte Aufgabe. Aus einem spitzigen Winkel, einem seiner Schenkel, der jenem spitzigen Winkel gegenüberliegenden Seite und einer gegebenen Veränderungszahl.

Nachdem abermals für das zu bildende △ der Schenkel des spitzigen ∠, so wie die ihm gegenüberstehende Seite aus dem Gegebenen gefunden worden sind, so müssen auch hier folgende Fälle unterschieden werden:

a) Ist die gegenüberliegende Seite größer als der Schenkel, so wird ebenso, wie bey der 3ten und 4ten Aufgabe verfahren.

b) Das nemliche Verfahren findet Statt, wenn der Schenkel und die gegenüberliegende Seite gleich sind.

c) Ist hingegen die letztere kleiner als jener, so zeichne den gegebenen spitzigen ∠, mache den einen Schenkel desselben so lang, als er für das zu bildende △ gefunden wurde, nehme die gefundene gegenüberliedende Seite in Zirkel, und beschreibe damit aus dem Endpunkt jenes Schenkels einen Bogen. Dieser wird den andern, von unbestimmter Länge gezogenen Schenkel entweder gar nicht erreichen, oder nur in Einem Punkte berühren, oder in zwey Punkten schneiden. Im ersten Fall ist die Aufgabe unmöglich, im 2ten entsteht ein rechtwinklichtes △, welches das verlangte ist, und im 3ten gibt es 2 △△. Welches von diesen beyden nun das verlangte sey, muß die Aufgabe entscheiden. In ihr muß nemlich, wenn sie nicht zu den unbestimmten gehören soll, auch angegeben seyn, ob der dem gegebenen Schenkel des spitzigen ∠ gegenüberstehende Winkel stumpf oder spitzig sey (§. 62. Nro. 5.)

Sechste Aufgabe. Aus Einer Seite, zweyen Winkeln und einer gegebenen Veränderungszahl.

Die Seite des zu bildenden Dreyecks wird aus der gegebenen Seite und der vorgeschriebenen Veränderungszahl gesucht, worauf an ihre beyden Endpunkte diejenigen Winkel aufgetragen werden, welche an ihr anliegen sollen. Diese 2 Winkel sind entweder die 2 gegebenen selbst, oder, wenn der eine von diesen der gegebenen Seite gegenüberliegt, so ist der andere an ihr anliegende die Ergänzung der Summe der gegebenen zu 180° (§. 62. Nro. 6.)

2) Auf dem Felde.

Die Auflösung der zweyten und sechsten Aufgabe kam oben schon im 1ten Hauptfall Nro. 3, bey den 2 ersten daselbst angegebenen Verfahrensarten vor, und mit der ersten, dritten, vierten und fünften Aufgabe hat es ganz dieselbe Bewandtniß, wie bey der Bildung übereinkommender Dreyecke auf dem Felde. Mau verfertige sich nemlich einen schicklichen verjüng. Maaßstab, und zeichne zuerst aus den gegebenen Seiten und Winkeln ein übereinkommendes Dreyeck auf dem Papier, an welchem die, nach dem 1ten Hauptfall Nro. 2, a, zum in Grund legen nöthigen Linien auf einem andern, der Veränderungszahl entsprechenden verjüngten Maaßstab gemessen werden. Dieser Maaßstab muß, wenn die Veränderungszahl eine Verjüngungszahl ist, um eben so vielmal größer, ist sie hingegen eine Vergrößerungszahl, um eben so vielmal, als jene Zahl verlangt, kleiner als der 1te Maaßstab seyn. Will man aber keinen 2ten Maaßstab zeichnen, so können die Höhe und die Stücke der Grundlinie auch auf dem ersten Maaßstab, nach welchem man das Dreyeck gebildet hat, gemessen, und durch Rechnung gefunden werden, wie viel der Theil oder auch das Vielfache von ihnen, welches die Veränderungszahl verlangt, ausmache.

§. 65.

Kehren wir jetzt zum §. 54, zur Messung unzugänglicher horizontaler Weiten auf dem Felde zurück, und wenden wir ein und die andere Aufgabe des vorigen §. auf diese Messung an.

1) Soll (Fig. 56) Die Linie AD gemessen werden, zu deren beyden Endpunkten A und D man aus dem Standpunkte C kommen kann, so kann Ca z. B. halb so groß als CA, deßgleichen Cd halb so groß als CD gemacht, und dadurch das dem △ CAD ähnliche △ Cad gebildet werden, und es wird nun auch ad die Hälfte von AD seyn.

Ebenso könnte man, wenn es die Umstände erlauben, ohne daß die Linien CA und CD durch C verlängert werden, einen Theil z. B. $\frac{1}{4}$ von CA von C nach a, und $\frac{1}{4}$ von CD von C nach d tragen, wo sodann in dem dem △ CAD ähnlichen △ Cad auch ad $\frac{1}{4}$ von AD seyn würde.

Wird in C der Meßtisch gestellt, von dem auf demselben perpendikular über C liegenden Punkte nach A und D visirt, und jede dieser Visirlinien nach einem beliebigen verjüngten Maaßstabe so lang gemacht, als man CA und CD mit der Meßruthe gefunden hat; so erhält man auf dem Tisch ebenfalls ein ähnliches △, bey welchem die gleichnamigte Seite von AD, auf dem nemlichen verjüngten Maaßstabe gemessen, eben so viel Ruthen, Fuße 2c. als die Linie AD, nach dem Feldmaaßstabe, halten wird.

Endlich kann auch der ∠ x mit dem Astrolab gemessen, sodann auf jedem Papier mit Hülfe eines verjüngten Maaßstabes und eines genauen Transporteurs ein ähnliches △ gebildet, und daran die gleichnamigte Seite von AD auf jenem Maaßstabe genommen werden.

2) Will man (Fig. 57.) die nur an Einem ihrer Endpunkte, nemlich im Punkte D zugangbare Linie AD messen; so können die zwey ersten der in Nro. 1 angegebenen Auflösungsarten auch hier angewendet werden, indem, wie zum Theil die Figur schon deutlich genug zeigt, aus Einer Seite und 2 anliegenden Winkeln ein ähnliches Dreyeck gebildet wird.

Diese Bildung eines ähnlichen Dreyecks aus einer Seite und 2 anliegenden Winkeln liegt auch den Auflösungsarten mit dem Meßtisch und dem Astrolab zu Grund. Es sey (Fig. 91.) AB zu messeu. Stelle den Tisch über B, suche mit dem an die Gabel angehängten Senkel das vertikal über B liegende Punkt b, visire nach A und nach einem in schicklicher Weite in C eingesteckten Stabe, messe BC, und mache nach einem, der Größe des Tisches entsprechenden verjüngten Maaßstabe, bc eben so groß. Hierauf wird der Tisch nach C gebracht, daselbst orientirt, und nach A visirt. Diese Visirlinie schneidet die von B nach A hin gezogene in a, wodurch das dem △ ABC ähnliche △ abc geschlossen wird, und an welchem endlich die Seite ab, als die gleichnamigte Seite von AB auf dem verjüngten Maaßstab gemessen werden kann.

Mißt man die ∠ ∠ ABC und ACB mit dem Astrolab, so kann, nachdem auch BC gemessen worden ist, das ähnliche △ abc mit Hülfe des Transporteurs und eines verjüngten Maaßstabes auf jedem Blatt Papier entworfen, und daran ab gemessen werden.

3) Ist endlich (Fig. 58.) die ganz unzugängliche Linie

AF die zu messende Weite, so finden auch hier, wie aus der Figur zu ersehen ist, die 2 ersten, in Nro. 1 angegebenen Verfahrensarten Statt. Es entsteht hierbey, nachdem man aus Einer Seite und 2 anliegenden Winkeln 2 ähnliche Dreyecke gebildet hat, aus 2 Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel ein drittes ähnliches Dreyeck, an welchem man die mit der zu bestimmenden Linie gleichnamigte Seite messen kann.

Will man sich aber (Fig. 92.) zur Messung der Linie AC des Tisches bedienen, so wird dieser über ein schickliches Punkt D gestellt, das Punkt d gesucht, von demselben nach A, C und einem in E eingesteckten Stab visirt, DE gemessen und de nach dem verjüngten Maaßstabe eben so groß gemacht. Wird hierauf der Tisch in E orientirt, und nach A sowohl als nach C eine Visirlinie gezogen, so ergeben sich die Punkte a und c, welche nach dem verjüngten Maaßstabe eben so weit als A und C nach dem Feldmaaßstabe von einander entfernt sind. Es ist 1) das $\triangle$ AED $\backsim$ dem $\triangle$ aed, weil der $\angle$ EDA $=$ dem $\angle$ eda, und der $\angle$ AED $=$ dem $\angle$ aed. 2) das $\triangle$ CDE $\backsim$ dem $\triangle$ cde, weil der $\angle$ DEC $=$ dem $\angle$ dec, und der $\angle$ CDE $=$ dem $\angle$ cde. Da nun die beyden größern $\triangle$ $\triangle$ die Linie DE, die beyden kleinern die Linie de zur gemeinschaftlichen Seite haben, und de gegen DE gehalten um eben so vielmal kleiner seyn muß, als der verjüngte Maaßstab kleiner als der Feldmaaßstab ist; so sind die kleinern $\triangle$ $\triangle$ nicht nur den größern überhaupt ähnlich, sondern sie sind auch um gleichvielmal verjüngt. Folglich wird auch z. B. ad eben so oft in cd, als AD in CD enthalten seyn, und mithin ist auch, da der ∠ ADC = dem ∠ adc, das △ ADC ähnlich dem △ adc (§. 62. Nro. 2.) und AC und ac sind in diesen ähnlichen △ △ gleichnamigte Seiten. das Nämliche läßt sich auch von den △ △ ACE und ace zeigen.

Werden die ∠ ∠ ADE, CDE, CED und AED mit dem Astrolab gemessen, so kann auch hier, wenn DE nach einem verjüngten Maaßstabe aufgetragen wird, auf jedem Blatt Papier, die Aufgabe mit dem Transporteur aufgelöst werden.

§. 66.

Alle Höhen (dieß Wort in demjenigen Sinne genommen, in welchem es in §. 29 vorgekommen ist) sind gewöhnlich, wenigstens an einem ihrer Endpunkte, an ihrem obern Ende unzugangbare Linien; nicht selten ist aber auch ihr anderes Ende, nemlich ihr Aufstehepunkt auf der Horizontalebene nicht nur unzugänglich, sondern auch dem Auge verborgen. Auf ihre Messung wollen wir im gegenwärtigen §. die Lehre von der Aehnlichkeit der Dreyecke anwenden, und die verschiedenen Arten, auf die man hierbey zu Werk gehen kann, kennen lernen.

A) Wenn der Boden horizontal, und

I) das Aufstehepunkt der Höhe zugangbar ist.

1te Art.

Nehme 2 Stäbe, von welchem der eine ungefähr die Hälfte des andern ist, und befestige am obern Ende des größern einen Ring von Blech oder Chartendeckel, durch dessen Centrum zwey, sich rechtwinklicht durchkreuzende Fäden, als Diameter des innern Cirkels, gezogen sind. Eine solche Vorrichtung heißt ein Fadenkreuz. Ans obere Ende des kleinern Stabs wird eine Scheibe ebenfalls von Blech oder Chartendeckel gesteckt, deren Centrum mit einer Nadel durchstochen ist. Diese Oeffnung heißt das Sehlöchlein. Den größern dieser beyden Stäbe stecke, wenn (Fig. 93.) BA die zu messende Höhe ist, vertikal in ein Punkt D, so, daß DB ungefähr = BA ist. Hierauf gehe mit dem kürzern Stabe IF auf der verlängerten Linie BD so lange ruckwarts, bis der Durchkreuzungspunkt der Fäden am größern Stabe, nemlich das Punkt E, und das Sehlöchlein F am kürzern Stabe mit dem Endpunkt A der Höhe BA in Einer Linie liegen, was durch ein geschicktes Visiren leicht bewerkstelligt werden kann. Nur muß hierbey der Stab IF immer vertikal gehalten werden.

Denkt man sich nun mit BI durch F die Parallele HF gezogen, so ist das $\triangle$ GEF $\backsim$ dem $\triangle$ HAF, indem der rechte $\angle$ bey G = dem rechten $\angle$ bey H und der $\angle$ x beyden $\triangle\ \triangle$ gemeinschaftlich (§. 62 Nro. 6.) oder weil GE parallel mit HA ist. (§. 63. Nro. 1.) Man kann daher sprechen: Eben so oft als EG (der Unterschied beyder Stäbe) in GF = DI (im Abstand dieser Stäbe) enthalten ist, eben so oft ist auch AH (die zu messende Höhe weniger HB) in HF = BI (im Abstand des kleinern Stabs vom Aufstehepunkt B) enthalten. Werden um EG, *) DI und BI wirklich gemessen, und durch Division gesucht, wie oft EG in DI enthalten ist, so darf man, da AH eben so oft in BI enthalten ist, nur mit jenem unbenannten Quotienten ins Maaß von BI dividiren, um AH zu bekommen. **) Wird endlich zu diesem gefundenen AH das Maaß der Linie HB = IF = der Höhe des kleinern Stabs addirt, so hat man in der Summe die zu messende Höhe BA.

2te Art.

Lege, wenn (Fig. 94.) die Höhe LK gemessen werden soll, in M einen Spiegel horizontal, so, daß LM ungefähr = LK, und gehe dann auf der verlängerten Linie LM so weit ruckwarts, bis du das Bild von K durch die Mitte des Spiegels erblickst. Da nun der Lichtstrahl KM unter eben dem Winkel, unter welchem er auf die Spiegelfläche auffällt, von

*) Das Maaß von EG wird erhalten, wenn man bey beyden Stäben die Entfernung ihres Aufstehepunkts vom Durchkreuzungspunkt der Fäden oder dem Sehlöchlein, die Linien ED und IF mißt, und das Maaß des kleinern Stabes vom Maaß des größern abzieht.

**) Verschiedene andere Arten dieser Berechnung, nach §. 77. d. Z. L. Beyspiel, wenn EG größer als GF, und mithin auch AH größer als BI.

von derselben zurückgeworfen wird (ein Satz, den wir hier aus der Lehre von den Lichtstrahlen entlehnen) so ist $x = y$, aber auch der rechte Winkel bey $L =$ dem rechten ∟ bey N, welchen die Linie MN mit dem vom Auge des Beobachters gefällten Perpendikel ON macht. Es werden daher die $\triangle\triangle$ LKM und NOM ähnlich seyn, und man kann sprechen: Eben so oft als ON in MN, eben so oft ist auch LK in LM enthalten. Statt eines wirklichen Spiegels dürfte es vortheilhaft seyn, sich eines Gefäßes mit Wasser zu bedienen, welches einen dunkeln Boden hat, indem die Wasserfläche sich von selbst vollkommen horizontal stellt.

3te Art.

Auch kann die gegenwärtige Aufgabe vermittelst des Schattens, welchen eine von der Sonne beschienene Höhe auf eine durch ihr unteres Ende gehende Horizontalfläche wirft, jedoch mit keiner großen Genauigkeit aufgelöst werden, weil der Schatten niemals so scharf begränzt ist, als es zu einer genauen Messung desselben nöthig wäre.

Stecke (Fig. 95.) zur Seite des Schattens CE, welchen die zu messende Höhe CD auf den horizontalen Boden wirft, einen Stab cd vollkommen vertikal ein, und messe so genau, als es möglich ist, und zwar zur nemlichen Zeit die Schattenlinien CE und ce, aber auch die Höhe des Stabes cd. Da nun alle Sonnenstrahlen, wie im 5ten und 6ten Theil ausführlicher gelehrt werden wird, unter sich parallel sind; so fallen die zunächst über D und d hingleitende Strahlen unter einerley Winkel auf die Horizontalfläche, d. h. x ist = y, aber auch der rechte ∠ bey C = dem rechten ∠ bey c, daher das Schattendreyeck CDE ∽ dem Schattendreyeck cde, und folglich kann die Berechnung von CD ebenso, wie in den 2 vorigen Auflösungsarten verrichtet werden. Daß übrigens zur Beobachtung des Schattens weder die Morgen- noch Abend-, sondern die Mittagsstunden, in welchen die Sonne am höchsten steht, und mithin der Schatten am kürzesten und schärfsten ist, gewählt werden müssen, und daß aus gleichem Grunde die Sommermonate hiezu tauglicher, als der Winter sind, versteht sich von selbst.

4te Art.

Statt der 2 Stäbe in Nro. 1 kann man sich auch des in Fig. 96, nach seinen wesentlichsten Theilen abgebildeten Instrumentes bedienen. AL ist ein viereckigter unten zugespitzter und beschlagener Pfahl von hartem Holz, an welchem eine auf- und abwärts verschiebbare Latte CE unter einem rechten ∠ angebracht ist. Das Ende E dieser Latte trägt eine Scheibe mit einem Sehlöchlein F, bey A ist ein Ring mit einem Fadenkreuz, und bey H ein kleines Häkchen, an welchem das Senkel HD herabhängt. Wird nun der Pfahl AL an einer schicklichen Stelle so eingesteckt, daß das eben angeführte Senkel auf den auf der Latte bemerkten Punkt D genau zutrifft; so steht

AL vertikal, und die horizontale Latte CE kann so lange auf = oder abwärts geschoben werden, bis das Sehlöchlein F, das Fadenkreuz A und die Spitze der zu messenden Höhe in einer Linie liegen. Hier ist das △ AGF eben das, was in Fig. 93 das △ EGF war, und die Berechnung geschieht ganz so, wie in Nro. 1. Die Länge der Linie GF = CE, d. i. die Länge der Latte, ist ein für allemal bekannt, die Länge der Linie AG kann, wenn AL eine genaue Eintheilung hat, auf dieser Eintheilung sogleich ersehen werden, und man hat daher nur noch nöthig, die Linie zwischen dem Punkte L, in welches der Pfahl AL eingesteckt ist, und dem Aufstehepunkt der Höhe zu messen. Wird hierzu das Maaß von CE addirt, so hat man die Länge der ganzen Standlinie, das wäre in Fig. 93 die Linie BI, woraus sich dann AH leicht berechnen, und, wenn man die Erhöhung der Latte über den Boden d. i. das Maaß der Linie LG (Fig. 96.) dazu addirt, die ganze zu messende Höhe finden läßt.

Richtet man (Fig. 96) die Latte CE so, daß AG = GF, also das △ AGF gleichschenklicht wird, und geht man dann mit dem ganzen Instrument so lange vor = und rückwärts, bis F, A und und die Spitze der zu messenden Höhe in Einer Linie liegen; so ist gar keine Berechnung nöthig. Denn man denke sich (Fig. 93) EG = GF, so ist auch AH = HF = BI. Man darf daher nur die ganze Standlinie messen, und hierzu abermals die

Erhöhung der Latte über den Boden addiren, um die ganze Höhe zu erhalten.

5te Art.

Stelle, wenn (Fig. 97.) AC zu messen ist, das Tischchen in D vertikal, so, daß d gerade über D und die mit der Seite des Tisches von d aus parallel gezogene Linie von unbestimmter Länge horizontal zu liegen komme. Dieß letztere geschieht, indem man an die untere Seite des Tischchens eine Wasserwage hält. Denkt man sich jene Linie, nachdem das Instrument gegen die zu messende Höhe gedreht worden ist, durch die Luft verlängert, so trifft sie das Punkt M, so, daß CM = Dd seyn wird. Es wird daher jetzt durch Anlegung des Linials an d (in welches Punkt man zuvor eine Nadel schlagen kann) und durch Visirung nach A der Höhenwinkel MdA aufgenommen, CD = Md gemessen, nach dem verjüngten Maaßstabe von d nach m getragen, und hier die Senkrechte ma errichtet; so ist, nach §. 62. Nro. 6, das △ mda ∽ dem △ MdA, und ma und MA sind gleichnamigte Seiten.

6te Art.

Setzt man endlich an die Stelle des Tischchens das Astrolab, und mißt damit den Winkel MdA nach Graden und Minuten, (§. 46.) so kann das △ mda mit Hilfe des Transporteurs und eines verjüngten Maaßstabes auf jedem Blatt Papier gezeichnet, und daran ma gemessen werden.

II) Wenn das Aufstehepunkt der Höhe unzugangbar ist.

Hier kann entweder das Aufstehepunkt gesehen werden, oder nicht. Ist das erstere der Fall, so wird die gewählte Standlinie, wie jede andere unzugängliche Weite, nach §. 54 oder 65, gemessen, und dann nach einer oder der andern der in Nro. I angegebenen Arten verfahren. Kann hingegen das Aufstehepunkt der Höhe nicht gesehen werden, so gibt es auch hier mehrere Mittel, durch die man dennoch seinen Zweck erreichen kann.

1te Art.

Stecke, wenn (Fig. 98) BC die zu messende Höhe ist, nach der 1ten Art in Nro. 1, 2 Stäbe DE und GF in E und F, aber auch in einer etwas größern Entfernung 2 andere Stäbe HM und IK in M und K. Es müssen aber sowohl die 2 größern als die 2 kleinern Stäbe vollkommen einerley Länge haben, d. h. es muß DE = HM und GF = IK seyn.

Denkt man sich nun die Linie AI, aber auch durch H mit CG die Parallele HN gezogen; so ist, weil x = y, der rechte ∠ bey L = dem rechten ∠ bey O, und DL = HO (§. 49. Nro. 7.) das

△ DLG ≌ dem △ HON, und LG = ON. Die Linie NI, welche = OI — ON ist, wird daher auch = OI — LG, das heißt die Differenz seyn, welche man erhält, wenn von der Weite des 2ten Paars Stäbe die Weite des 1ten Paars abgezogen wird.

Da ferner, weil HN parallel mit CG, das △ HNI ∽ dem △ CGI, so ist NI in HN oder DG eben so oft, als GI oder FK in CG enthalten.

Auch sind, weil DL parallel mit CA, die △ △ DLG und CAG ähnlich, und folglich ist DL in DG eben so oft, als CA in CG enthalten.

Nun könnte man zwar, nach dem vorvorigen Satz, wenn außer den andern zur Rechnung nöthigen Linien auch DG mit einer von D nach G gespannten Schnur gemessen würde, zuerst aus NI, DG und FK die Linie CG, und sodann, nach dem letzten Satz, aus DL, DG und CG die Höhe CA berechnen. Es wird aber im 3ten Curs der Zahlenlehre (§. 240.) gezeigt werden, daß, wenn

NI in DG so oft, als FK in CG
und DL in DG so oft, als CA in CG enthalten ist,

---

auch NI in DL so oft, als FK in CA
enthalten sey.

Man darf daher nur mit NI in DL dividiren, und mit dem unbenannten Quotienten das Maaß der Linie FK multipliciren, so hat man CA *)

2te Art.

Stelle (Fig 99) wie bey der 5ten Art in Nro. I, den Tisch über d, und nehme damit den ∠ MdA auf, weil aber CD nicht gemessen werden kann, so trage, nachdem de nach dem verjüngten Maaßstabe = DE gemacht worden, den Tisch nach E, orientire ihn daselbst, und visire von e nach A. Diese Visirlinie schneidet die von d nach A gezogene in a, und schließt dadurch das △ aed, welches, nach §. 62 Nro. 6, dem △ Aed ähnlich ist. Wird nun die Linie ed unbestimmt verlängert, und auf diese Verlängerung das Perpendickel am gefällt, so entsteht das rechtwinklichte △ ame, welches ebenfalls, nach §. 62 Nro. 6, dem rechtwinklichten △ AMe ähnlich ist, und woran am als gleichnamigte Seite von AM auf dem verjüngten Maaßstabe gemessen werden kann.

3te Art.

Messe die Winkel AdM und Aem mit dem Astrolab, und DE mit der Ruthe; so können mit einem

*) Andere Arten der Berechnung nach §. 77 der Z. L. Beyspiel, wenn NI größer als DL, und mithin auch FK größer als CA.

guten Transporteur und einem verjüngten Maaßstab die △ △ aed und ame auf jedem Blatt Papier, nach §. 64, gezeichnet, und die Linie am gemessen werden.

B.) Bey allen bisherigen Auflösungen im gegenwärtigen §. wurde voraus gesetzt, daß die Fläche, worauf die Höhe steht, und folglich auch die darauf angenommene Standlinie horizontal sey. Ist dieß nicht der Fall, sondern macht die Standlinie mit der zu messenden Höhe einen schiefen Winkel, so bedient man sich gemeiniglich, es mag nun die Höhe zugangbar seyn oder nicht, des Astrolabs, wobey aber, wenn man sich nur auf einige Richtigkeit Hoffnung machen will, alle nöthigen Winkel und Linien mit der größten Schärfe gemessen, und auch die Zeichnungen der verjüngten Figuren mit der möglichsten Genauigkeit entworfen werden müssen.

I) Wenn die Höhe zugangbar ist.

(Tab. X. Fig. 97 a. und b.)

Es sey (Fig. 97 a.) die Höhe BC zu messen. Stelle das Astrolab in A, und messe die ∠ ∠ x und y; die Standlinie AB aber wird mit Meßstangen vollkommen horizontal gemessen, und dadurch das Maaß der Linie DE erhalten. Nun sind in dem △ DEC, die Seite DE, der ∠ x und der rechte ∠ u, deßgleichen im △ DEB, die Seite DE, der ∠ y und der rechte ∠ v bekannt, und es kann mithin ein dem △ DBC ähnliches △ gebildet, und daran die gleichnamigte Seite von BC gemessen werden.

Sollte (Fig. 97. b.) die Höhe AB gefunden werden, so sucht man auch hier zuerst die $\angle$ y und x, mißt die Standlinie AD horizontal, erhält dadurch das Maaß der Linie CE, und hat folglich, da in dem $\triangle$ CEB die Seite CE, der $\angle$ (y + x) und der rechte $\angle$ bey E, deßgleichen im $\triangle$ CEA die Seite CE, der $\angle$ x und der rechte $\angle$ bey E bekannt sind, zur Bildung eines dem $\triangle$ CAB ähnlichen Dreyecks hinlängliche Stücke.

II) Wenn die Höhe unzugangbar ist.

(Tab. X. Fig. 99 a. und b.)

Stelle das Astrolab in B, und messe, nachdem in A ein Stab AF von gleicher Höhe mit dem Astrolab BC gesteckt worden, den $\angle$ x. Wird hierauf das Instrument nach A und der Stab nach B gebracht, der $\angle$ n, aber auch der $\angle$ s, welchen die Visirlinie DF mit der durch F gehenden horizontalen Linie EF macht, und endlich die Standlinie AB = FC, jedoch nicht horizontal, sondern nach ihrer schiefen Länge gemessen; so hat man auch hier zur Zeichnung eines dem $\triangle$ FGD ähnlichen Dreyecks fgd hinlänglich bestimmende Stücke.

Es sind nemlich im $\triangle$ CFD die Seite CF, der $\angle$ x und der $\angle$ n bekannt, woraus ein ähnliches

△ cfd gebildet, und die Linie cf unbestimmt verlängert werden kann. Durch diese Verlängerung entsteht der ∠ gfd, welcher = dem ∠ GFD nemlich = dem Nachbar von n, d. h. = 180°— n ist. Wäre nun im △ FGD noch der Winkel GDF bekannt, so könnte dieser an die verjüngte Seite df angelegt, und dadurch das ähnliche △ fgd erhalten werden. Jener ∠ GDF aber wird gefunden, wenn man den ∠ bey G und den ∠ GFD addirt, und ihre Summe von 180° abzieht. Es fragt sich also jetzt, ob man den ∠ bey G finden kann. Er ist, da CD parallel mit AF, als Wechselswinkel = dem ∠ GFA, welcher sich vermittelst des gemessenen Winkels s auf folgende Art bestimmen läßt: Es ist

1) in Fig. 99 a.

der ∠ GFA = 90°— ∠ GFE, und dieser = ∠ GFD (dem Nachbar von n) — ∠ s.

2) in Fig. 99 b.

der ∠ GFA = 90° + ∠ GFE, und dieser = ∠ s — ∠ GFD (dem Nachbar von n)

Es kann mithin der ∠ bey G gefunden, und, wie gezeigt worden ist, ein dem △ FGD ähnlicher Triangel fgd gezeichnet werden. Wird nun an diesem die Seite gd gemessen, und das Maaß von BC = AF = CG (die Höhe des Astrolabs) dazu addirt, so erhält man in der Summe die zu messende Höhe CD.

§. 67.

Wie wir im §. 56, nach vollendeter Lehre von den übereinkommenden Dreyecken, zu übereinkommenden Parallelogrammen, Trapezen und irregulären Vielecken übergiengen, so wollen wir jetzt, nach beendigter Lehre von den ähnlichen Dreyecken, das Erlernte ebenfalls auf die genannten Flächenfiguren anwenden, und zu jeder vor Augen liegenden, es sey auf dem Papier oder dem Felde, eine andere ihr ähnliche bilden lernen.

1) Wenn das Original auf dem Papier gezeichnet ist, und die verlangte ihm ähnliche Figur gleichfalls auf Papier gezeichnet werden soll.

1te Art.

Zerlege das Original z. B. (Fig. 100.) das Sechseck ABCEFD durch Diagonalen in △ △, oder stelle dir wenigstens vor, daß dieß geschehen sey, und zeichne dann zu jedem einzelnen △ ABC, ACD ꝛc. (nach §. 64, 1ter Hauptfall, Nro. 1. dritte Art) ein ihm ähnliches Dreyeck abc, acd ꝛc., so wird hierdurch das Sechseck abcefd entstehen, welches dem vorgegebenen nicht nur überhaupt ähnlich, sondern an welchem auch jede Seite, z. B. die Seite ab der ebensovielste Theil der gleichnamigten Seite AB seyn wird, als die Aufgabe verlangt, in so fern nur die 2 Maaßstäbe mit möglichster Genauigkeit der Bedingung der Aufgabe entsprechend gezeichnet wurden.

Auf gleiche Weise könnte, wenn das kleinere Sechseck das vorgegebene wäre, ein ihm ähnliches größeres gebildet werden.

2te Art.

Bediene dich eines guten, zu den nöthigen Veränderungen bequem eingerichteten Storchschnabels, stelle ihn so, daß er der Veränderungszahl der Aufgabe entspricht, und bestimme dann durch ihn zu jedem Winkelpunkt des vorliegenden Originals ein ähnlich liegendes Punkt in der zu bildenden kleinern oder größern Figur. Sollen ganze Plane, in welchen viele krumme Linien, als z. B. Flüsse, Wege rc. vorkommen, verjüngt oder vergrößert werden, so geschieht dieß auf diese Art ungemein leicht und schnell, und wenn das Instrument gut ist, gewiß auch mit einer in den meisten Fällen voll genügenden Genauigkeit.

3te Art.

Auch das oben im §. 56. beschriebene Fadennetz läßt sich bey Vergrößerung oder Verkleinerung ganzer Plane mit vielem Vortheil gebrauchen. Die Seite des Quadrats oder Rechtecks, in welches der zu zeichnende Plan kommen soll, muß in der Seite des Originals oder diese in jener eben so oft enthalten seyn, als die Aufgabe verlangt, worauf die Seiten jenes Vierecks in eben so viele gleiche Theile, als die Rahme des auf dem Original liegenden Fadennetzes hat, getheilt, die Theilpunkte mit Bleystiftslinien zusammengezogen, und in die dadurch entstehende kleine Quadrate oder Rechtecke die einzelnen Linien und Punkte nach dem Augenmaaß eingetragen werden.

4te und 5te Art.

Endlich läßt sich auch aus den Seiten und Winkeln, so wie, hauptsächlich bey krummlinigten Figuren, durch Perpendikel, welche auf eine durch die Mitte der Figur gehende gerade Linie, oder auf die Seiten eines um die Figur beschriebenen Vier = oder Vielecks von jeder merklichen Krümmung gefällt werden, nach §. 56. Nro. 1. 5te und 6te Art, eine ähnliche Flächenfigur zeichnen, sobald man die Seiten des Originals oder jene Perpendikel und die Abschnitte der Linie, auf welcher sie aufstehen mittelst zweyer der Bedingung der Aufgabe entsprechenden Maaßstäbe gehörig verjüngt oder vergrößert.

2) Wenn das Original zwar abermals auf dem Papier gezeichnet ist, die zu bildende, ihm ähnliche Figur aber auf dem Felde abgesteckt, in Grund gelegt werden soll.

1te Art. Ohne Meßtisch und Astrolab.

Zerlege die Figur auf dem Papier durch Diagonalen in △ △, und stecke sodann (nach §. 64, 1ter Hauptfall, Nro. 2. erste Art) einen Triangel nach dem andern auf dem Felde ab.

Oder

Bediene dich der eigentlichen Perpendikularmethode. Das hierbey nöthige Verfahren wird in Nro. 4 lit. a. erste Art, fürs Aufnehmen der Figuren gelehrt, und darf, um auf den gegenwärtigen Fall zu passen, nur umgekehrt werden.

2te Art. Mit dem Meßtisch.

Bringe (Fig. 103.) das Tischchen, worauf die in Grund zu legende Figur abcd gezeichnet ist, an den verlangten Platz, wo die Figur abgesteckt werden soll. Gemeiniglich ist hier Ein Punkt der abzusteckenden Figur z. B. das Punkt A, und die Lage einer Seite, z. B. der Seite AB, bestimmt angegeben. Stelle daher in diesem Fall mit Hülfe des Senkels das Tischchen so, daß a perpendikular über A zu liegen kommt; lege das Linial an ab, und drehe den Tisch so lange, bis du durch die Dioptern den in der Gegend von B eingesteckten Stab sehen kannst; lege ferner, ohne den Tisch zu verändern, das Linial an ac, und lasse in dieser Visirlinie in der Gegend von C einen Stab stecken. Hierdurch ist der ∠ bac aufs Feld getragen. Die Schenkel AB und AC werden nun mit der Ruthe eben so lang gemacht, als es die Linien ab und ac nach dem der Aufgabe beygelegten, verjüngten Maaßstabe sind, und hierdurch die Punkte B und C auf dem Felde erhalten. Bringe nunmehr den Tisch nach B, orientire ihn daselbst, lege das Linial an bd, und laß auch in dieser Visirlinie in der Gegend von D einen Stab stecken; so ist auch der ∠ abd = dem Winkel ABD, dessen Schenkel BD nach dem Feldmaaßstabe eben so lang, als bd nach dem verjüngten Maaßstabe ist, gemacht, und dadurch auch das 4te Winkelpunkt D, mithin die ganze Figur ABCD erhalten wird.

3te Art. Mit dem Astrolab.

Messe die ∠ ∠ cab und abd mit einem guten Transporteur so genau, wie möglich, und trage sie, nachdem AB abgesteckt worden, mit dem Astrolab nach A und B, so können die Punkte C und D eben so, wie bey der 2ten Art, gefunden werden.

3) Wenn das Original auf dem Felde abgesteckt ist und die zu bildende ähnliche (nach einer gegebenen Veränderungszahl größere oder kleinere) Figur gleichfalls auf dem Felde abgesteckt werden soll.

Die 4te und 5te Art in Nro. 1. finden auch hier statt, und zwar kann die letztere, die Perpendikularmethode hier auch bey geradlinichten Figuren mit Vortheil angewendet werden. Ist es gestattet, in der Figur frey herumzugehen, und ist eine ihrer Seiten, z. B. (Fig. 104.) die Seite AE rücksichtlich der übrigen Seiten beträchtlich lang; so können von den Winkelpunkten B, C ꝛc. auf jene Linie AE, oder nöthigen Falls, auch auf ihre Verlängerung die Perpendickel BF, CG ꝛc. gefällt, diese Perpendikel, aber auch die Abschnitte AF, AG ꝛc. gemessen, ihr Maaß, wenn, wie wir hier voraus setzen, die Figur verkleinert werden soll, mit der Veränderungszahl dividirt, und endlich die Abschnitte af, ag ꝛc. und die Perpendikel bf, cg ꝛc. den erhaltenen Quotienten gleich gemacht werden.

4) Wenn das Original zwar abermals auf dem Felde abgesteckt ist, die zu bildende ähnliche Figur aber nach einem verjüngten Maaßstabe auf dem Papier gezeichnet, oder kurz, wenn eine Figur aufgenommen werden soll.

a) Wenn man in der Figur frey herumgehen kann.

1te Art. Ohne Meßtisch und Astrolab.

Zerlege durch Diagonalen, und messe alle Seiten der hierdurch entstehenden △ △, so können diese, nach §. 64, 1ter Hauptfall, Nro. 4. erste Art, einzeln aufgenommen werden, und bilden, wenn man sie auf dem Papier in der nemlichen Ordnung, in der sie sich auf dem Felde befinden, aneinander reiht, zusammen die verlangte ähnliche Figur.

Oder

Bediene dich der Perpendikularmethode, wobey das in Nro. 3. von geradlinichten Figuren bemerkte auch hier gilt. Die Abschnitte af, ag ꝛc. (Fig. 104) und die Perpendikel bf, cg ꝛc. werden nach dem verjüngten Maaßstabe eben so lang gemacht, als die Abschnitte AF, AG ꝛc. und die Perpendikel BF, CG ꝛc. nach dem Feldmaaßstabe gefunden wurden.

Bey

Bey krummlinichten Figuren werden die Perpendikel auf ein durch ihre Mitte abgesteckte gerade Linie gefällt.

2te Art. Mit dem Meßtisch.

Stelle (Fig. 105.) das Instrument ungefähr in die Mitte der aufzunehmenden Figur, befestige in m eine Anschlagnadel, und ziehe nach allen Winkelpunkten A, C, B ꝛc. Visirlinien. Werden nun, wenn man das perpendikular unter m auf dem Boden liegende Punkt mit M benennt, die Linien AM, CM, BM, ꝛc. gemessen, und auf dem Tisch die Linien am, cm, bm ꝛc. nach dem verjüngten Maaßstabe eben so lang gemacht; so können die Seiten der verjüngten Figur ac, cb, ꝛc. gezogen werden.

3te Art. Mit dem Astrolab.

Messe die Winkel AMC, CMB ꝛc. nach Graden und Minuten, so kann, nachdem abermals die Linien AM, CM ꝛc. gemessen worden sind, die ähnliche Figur mit Hilfe eines Transporteurs und eines verjüngten Maaßstabes gezeichnet werden.

b) Wenn man in der Figur nicht herumgehen, sie aber aus 2 benachbarten Winkelpunkten ganz übersehen kann.

1te Art. Mit dem Meßtisch.

Stelle (Fig. 106.) den Tisch so über das Winkelpunkt A, daß du zu der verjüngten Figur, welche darauf gezeichnet werden soll, hinlänglich Platz hast; befestige in dem perpendikular über A liegenden Punkt a eine Nadel; visire nach allen übrigen Winkelpunkten, nach B, C, D und E; messe AB, und mache nach dem verjüngten Maaßstabe ab eben so lang; trage hierauf den Tisch nach B, orientire ihn daselbst, und visire abermals nach allen übrigen Winkelpunkten, A, E, D und C; so werden diese Visirlinien jene erstern schneiden, und dadurch auch die Punkte e, d und c erhalten werden.

2te Art. Mit dem Astrolab.

Messe die ∠∠ BAC, CAD und DAE, deßgleichen die ∠∠ ABE, EBD und DBC nach Graden und Minuten, so können, nachdem auch AB gemessen und verjüngt aufs Papier gezeichnet worden ist, jene Winkel mit dem Transporteur aufgetragen, und in den Durchschnittspunkten ihrer Schenkel die übrigen Winkelpunkte der verjüngten Figur gefunden werden.

c) Wenn man weder in der Figur herumgehen, noch sie aus 2 benachbarten Winkelpunkten ganz übersehen kann.

1te Art. Mit dem Meßtisch.

Stelle (Fig 107.) das Tischchen über einen beliebigen Winkelpunkt C, und zwar wiederum so, daß nach der Lage der aufzunehmenden Figur genug Platz auf demselben erhalten wird; suche mit dem Senkel das perpendikular über C liegende Punkt c, und visire von da nach D und F; messe CD und CF, und trage sie verjüngt von c nach d und f, orientire hierauf den Tisch in D, visire von d nach E, messe DE, und trage das Maaß davon von d nach e; bringe endlich den Tisch nach E, orientire ihn, visire nach G, messe EG, und trage auch diese Linie verjüngt von e nach g, so kann auch fg gezogen werden.

Als Probe mißt man nun die Linie FG und fg, jene mit dem Feld = diese mit den verjüngten Maaßstabe, wo sie sodann, wenn nicht gefehlt worden ist, in ihrem Maaß genau übereinstimmen müssen. Eine andere, nicht minder gute Probe ist, wenn man den Tisch in G durch Visirung nach E orientirt; das Linial hierauf an gf anlegt, und untersucht, ob diese Visirlinie wirklich das Punkt F trifft.

Statt den Tisch von D nach E zu bringen, könnte man auch die Linie GE und FG messen, mit der verjüngten GE aus e, und mit der verjüngten FG aus f Kreuzbögen machen, und so das noch fehlende Punkt g finden. Oder man könnte endlich auch, statt CF zu messen, den Tisch von E nach G bringen, ihn daselbst orientiren, und durch Visirung nach F eine Visirlinie gf ziehen, welche die im Anfang der Arbeit gezogene Visirlinie cf im Punkte f schneiden wird. Vergleiche §. 56. Nro. 1. Fünfte Art.

2te Art. Mit dem Astrolab.

Auch hier werden entweder alle Seiten, und mit dem Astrolab, nach Graden und Minuten, alle Winkel am Umfang, weniger 3, oder alle Seiten weniger 2 und alle Winkel weniger 1, oder alle Seiten weniger 1 und alle Winkel weniger 2 gemessen, die Seiten verjüngt und die Winkel mit dem Transporteur aufs Papier getragen.

Die Prüfung ist die nemliche wie bey der Aufgabe in der so eben angeführten Stelle des §. 56.

In den Fällen b und c kann man auch, wenn man außerhalb der Figur hinlänglich freyen Platz hat, ein Rektangel oder Quadrat um dieselbe abstecken, und von jedem Winkelpunkt eine Perpendikulare fällen, ꝛc. Bey krummlinichten Figuren ist dieses ohnehin beynahe das einzige Mittel.

§. 68. *)

Soll eine ganze Gegend von mehrern Ortschaften mit den dazu gehörigen Gemarkungen vermittelst des Meßtisches so aufgenommen werden, daß alle erheblichen Gegenstände auf dem zu entwerfenden Plane bezeichnet seyen; so mache man den Anfang der Arbeit mit einer ge-

*) Ausführlich handelt von der Aufgabe dieses §. Vega im zweyten Band seiner Vorlesungen über die Mathematik.

nauen Besichtigung der aufzunehmenden Gegend und einem ungefähren Entwurf derselben. Man sieht sich hierbey mehrere sogenannte Fixpunkte aus, d. i., wie z. B. Thürme, Kreuze rc. hoch hervorragende und unbewegliche Gegenstände, welche von mehrern Seiten gesehen werden können. Hat aber eine Gegend Mangel an solchen Gegenständen, so steckt man an den schicklichsten Orten, besonders auf Anhöhen lange, an ihrem obern Ende etwa mit einem Strohwisch versehene Stangen vertikal ein, oder bindet sie in waldigten Gegenden an die Gipfel der Bäume an.

Ist dieser ungefähre Entwurf fertig, so macht man sich an das geometrische Trianguliren der aufzunehmenden Gegend. Es seyen (Fig. 108.) a, b, c, d, e, f, g und h die ausgewählten Fixpunkte, so sind die einzeln, hierbey vorzunehmenden Operationen folgende:

1) Stecke in einer bey der Besichtigung der Gegend hierzu ausgewählten Ebene die Standlinie DC ab, und messe sie mit möglichster Genauigkeit. Nachdem in das eine ihrer Endpunkte C, so wie auch in die Mitte derselben B ein Stab gesteckt worden, so orientire den Tisch über D nach dem Augenmaaße so, daß die ganze Gegend nach dem angenommenen Maaßstabe darauf Platz hat. An das perpendikular über D auf dem Meßtisch liegende Punkt lege das Visirlinial, visire damit nach C, und ziehe diese Visirlinie mit dem Bleystift längs dem ganzen Linial. Trage endlich die Linie DC nach dem verjüngten Maaßstab auf, und bemerke auch das Punkt B.

2) Gesetzt nun, man könne von D aus von den obengenannten Fixpunkten die Punkte h, g, e. b und a sehen, so werden diese von D aus anvisirt, und die Visirlinien mit dem Bleystift gezogen.

3) Ehe man aber das erste Standpunkt D verläßt, so muß man ein neues schickliches Standpunkt E gewählt, mit einem Stabe bezeichnet, und von D aus anvisirt haben. Dieses 2te Standpunkt E muß so gewählt werden, daß von ihm aus theils mehrere der schon gezogenen Visirlinien geschnitten, theils neue Fixpunkte anvisirt werden können.

Ist dies alles geschehen, so trage den Tisch in die Gegend von E, orientire ihn auf der Linie DE oder ihrer Verlängerung durchs Zurückvisiren nach D (woselbst nach Wegnahme des Tisches ein Stab eingesteckt worden ist) und durchschneide dann rückwärts die Visirlinien DE durch Visirung nach C (§. 64. 1ter Hauptfall, Nro. 4)

5) Nachdem auf diese Art, die Lage des neuen Standpunktes E auf dem Tisch gefunden worden, legt man, um die Richtigkeit der bisherigen Arbeiten zu prüfen, das Linial an das Punkt B auf dem Tisch, und visirt damit nach dem Punkt B auf dem Felde. Ist nun bey der Absteckung, Abmessung und Auftragung der Standlinie DC und bey der Bestimmung des Punktes E nicht gefehlt worden, so wird das Linial auch genau an dem Punkt E anliegen.

6) Wir wollen nun annehmen, daß man von E

aus die Fixpunkte g, e, b, c, d und f sehen kann, so werden durch Visirlinien nach den 3 ersten die nach eben diesen Punkten von D aus gezogenen Linien geschnitten, und mithin dadurch diese Punkte g, e und b, ihrer Lage nach, auf dem Tisch bestimmt. Die 3 übrigen c, d und f werden anvisirt.

7) Wie in D, so muß auch hier, ehe man das Standpunkt E verläßt, ein neues schickliches Standpunkt F gewählt, und von E aus anvisirt worden seyn. Zum Rückwärtsschneiden dieser Visirlinie EF kann man sich eines auf dem Tisch schon befindlichen Fixpunktes, etwa des Punktes g, und zur Prüfung des Punktes e bedienen.

8) Von diesem Standpunkt F aus werden nun die Visirlinien Ec, Ed und Ef geschnitten, und hierdurch auch die Punkte c, d und f erhalten.

9) Um endlich auch noch die 2 Fixpunkte a und h zu bestimmen, von welchen wir voraussetzen, daß sie weder von E noch von F aus gesehen werden können, hat man ein neues Standpunkt A nöthig. Von dieser Nothwendigkeit wird man sich schon bey der Besichtigung der Gegend überzeugt, und deßwegen das Punkt A, als der Tisch noch in D stand, anvisirt haben.

Man orientire daher jetzt den Tisch durch Zurückvisiren nach D auf der Linie AD, schneide sich etwa von b rückwarts ein, und stelle die Prüfung mittelst des Fixpunktes g an, worauf die Visirlinien Aa und Ah ge=

zogen, und dadurch die Punkte a und h gefunden werden.

Bey allen diesen Operationen ist noch zu bemerken, daß die Visirlinien, welche durch ihre Durchkreuzung ein Punkt bestimmen, sich weder unter sehr spitzigen noch unter sehr stumpfen Winkeln schneiden dürfen — ein Umstand, auf den man schon bey der Wahl der Fixpunkte, nicht weniger aber bey der Annahme der Standpunkte die sorgfältigste Rücksicht nehmen muß.

Nach vollendeter Triangulirung folgt endlich das sogenannte Figuriren oder die Aufnahme des Details. Es geschieht dieß am kürzesten und leichtesten auf folgende Art:

1) Bringe den Tisch über dasjenige Standpunkt, welches nach der Beschaffenheit der Gegend zum Anfang das schicklichste ist, und orientire ihn daselbst.

2) Gehe mit einem Gehilfen in der Nachbarschaft dieses Punktes umher, und zeichne alle erheblichen Gegenstände, welche auf dem Plane bemerkt werden sollen, nach dem Augenmaaß auf ein besonderes Blatt, während der Gehilfe nach der Ordnung der Zahlen numerirte Pflöcke in die gewählten Punkte einschlägt.

3) Gehe zum Meßtisch zurück, laß den Gehilfen einen Stab nach der Ordnung der Zahlen nach und nach über alle jene Pflöcke halten, und visire so ein jedes jener Punkte an. Hierbey ist es zur Vermeidung alles Irrthums gut,

wenn zu jeder Visirlinie die Nummer des Punktes, nach welchen sie gezogen ist, gesetzt wird.

4) Bringe den Tisch über einen andern schicklichen Stand = oder Fixpunkt, von welchem aus jene Visirlinien vortheilhaft geschnitten werden können, und nehme diese Durchschneidung, abermals nach der Ordnung der Zahlen wirklich vor. Sollte aber kein Stand = oder Fixpunkt hierzu gelegen seyn, so schneide dich in der schicklichsten Gegend, nach welcher du in dieser Absicht vom ersten Standpunkt aus eine Visirlinie gezogen hast, vermittelst eines Fixpunktes rückwärts ein, und durchschneide dann von hier aus die erstgezogenen Visirlinien.

5) In der Nachbarschaft dieses 2ten Standpunktes verfahre ebenso, und setze diese Arbeit so lange fort, bis alle merkwürdigen Punkte auf den Tisch getragen sind.

6) Endlich zeichne die einzeln Gegenstände, als Wege, Bäche, Höfe, Hirtenhäuschen rc. mit Hilfe der nach Nro. 2 auf ein besonderes Blatt nach dem Augenmaaß entworfenen Zeichnung, und zwar ehe dir das Bild der Gegend entfallen kann, jedoch nur mit Bleystift auf den Tisch, so kann dann zu Hause das Papier von demselben abgeschnitten, und der Plan ins Reine gearbeitet werden.