Berechnungsbeispiele

urn:nbn:de:bsz:31-335013

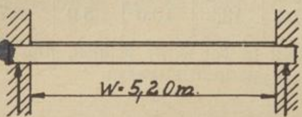
Berechnungsbeispiele

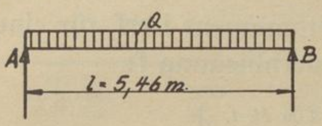
(Alle Ausrechnungen erfolgten mit dem Rechenschieber und sind daher nur annähernd genau.)

1. Berechnung eines Balkens auf Biegung und Durchbiegung

Ein frei aufliegender Balken einer Holzbalkendecke über einer Raumweite von $w = 5{,}20$ m ist zu berechnen. Der Balkenabstand beträgt: $a = 0{,}80$ m.

Stützweite $l = w + \frac{1}{2} \cdot 2\,a = 5{,}46$ m.





Die Belastung pro 1 m² beträgt:

Nutzlast	= 200 kg/m²
Eigenlast = nach DIN 1055 — Bl. 2 — Nr. 33	= 210 kg/m²
Zusammen:	410 kg/m²

$Q = 5{,}46 \cdot 0{,}80 \cdot 410 = 1790$ kg
$A = B = 895$ kg

a) **Berechnung auf Biegung**

$$\max M = \frac{1}{8} \cdot Q \cdot l = 0{,}125 \cdot 1790 \cdot 5{,}46 = 1220 \text{ kg/m}$$

ohne Berücksichtigung der zulässigen Durchbiegung würde ein Balken von 14/24 cm [] mit $W = 1344$ cm³ genügen.

$$\sigma_b = \frac{122000}{1344} = 90{,}5 \text{ kg/cm}^2 \; (\sigma_{b\,zul} = 90 \text{ kg/cm}^2)$$

b) **Berechnung auf Durchbiegung**

Die zulässige Durchbiegung ist abhängig von der Art des Tragbalkens und seiner Wichtigkeit (siehe DIN 1052, V. § 15).

Angenommen: zulässige Durchbiegung $f \leqq \frac{1}{300}\,l$.

Dann ist nach der Tabelle auf Seite 157

$J\,erf. = 3{,}13 \cdot 1220 \cdot 5{,}46 = 20850$ cm⁴

Gewählt 18/24 cm [] mit $J = 20736$ cm⁴ und $W = 1728$ cm³.

Die Durchbiegung beträgt:

$$f = \frac{5 \cdot Q \cdot l^3}{384 \cdot EJ} = \frac{5 \cdot 1790 \cdot 546^3}{384 \cdot 100000 \cdot 20736} = 1{,}83 \text{ cm}$$

oder bezogen auf die Stützweite l

$$\frac{f}{l} = \frac{1{,}83}{546} = \frac{1}{298} \text{ derselben}$$

$$\max \sigma_b = \frac{M}{W} = \frac{122000}{1728} = 70{,}6 \text{ kg/cm}^2.$$

2. Bemessung eines Druckstabes bei mittigem Kraftangriff nach dem ω-Verfahren.

Eine Holzstütze (Nadelholz) erhält durch einen Unterzug eine Belastung von $S = -20000$ kg.

Knicklänge der Stütze: $S_K = 3{,}50$ m

Gewählt 22/22 cm [] mit $J = 19521$ cm⁴ und $F = 484$ cm²

Trägheitsradius $i = \sqrt{\frac{J}{F}} = 0{,}289 \cdot b = 0{,}289 \cdot 22 = 6{,}35$ cm

Schlankheitsgrad $\lambda = \frac{S_K}{i} = \frac{350}{6{,}35} = 55$

Knickzahl $\omega =$ nach DIN 1052, Tafel 3 $= 1{,}76$

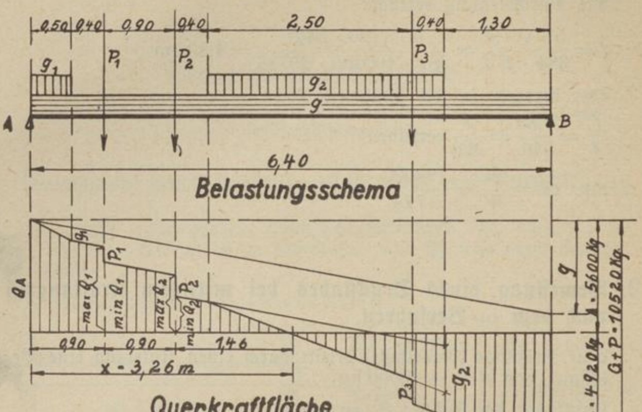
Knickspannung $\sigma_K = \frac{\omega \cdot S}{F} = \frac{1{,}76 \cdot 20000}{484} = 72{,}7$ kg/cm²

($\sigma_{K\,zul} = 80$ kg/cm²).

3. Berechnung eines verdübelten Balkens mit verschiedenartiger Belastung.

Ein freiauflagernder Balken von 6,40 m Stützweite erhält nach nebenstehender Figur folgende Belastungen:

$$\begin{aligned} G &= 4600 \text{ kg} \\ G_1 &= 600 \text{ kg} \\ G_2 &= 2320 \text{ kg} \\ P_1 &= 800 \text{ kg} \\ P_2 &= 1000 \text{ kg} \\ P_3 &= 1200 \text{ kg} \\ \hline \text{Zusammen: } & 10520 \text{ kg} \end{aligned}$$



Die Auflagerreaktionen betragen:

$$A = 2300 + \frac{1}{6{,}40}\,(600 \cdot 6{,}15 + 2320 \cdot 2{,}75 + 800$$
$$5{,}50 + 1000 \cdot 4{,}60 + 1200 \cdot 1{,}70 = 5600\ \text{kg}$$
$$B = 10520 - 5600 = 4920\ \text{kg}$$

Die gleichmäßig verteilte Last „G“ belastet den Träger auf die Längeneinheit (1,00 m) mit $g = \frac{1}{6{,}40} \cdot 4600 = 720$ kg.

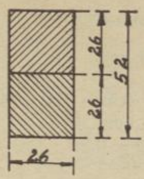
Die Last von „G_2“ auf die Längeneinheit beträgt

$$g_2 = \frac{1}{2{,}90} \cdot 2320 = 800\ \text{kg}$$

Der gefährliche Querschnitt liegt

$$X = \frac{1}{720 + 800}\,(5600 - 600 - 800 - 1000 - 2{,}20 \cdot 720)$$
$$+\, 2{,}20 = 3{,}26\ \text{m von}\ A$$

$$\max M = 5600 \cdot 3{,}26 - 600 \cdot 3{,}01 - 800 \cdot 2{,}36 - 1000 \cdot 1{,}46 -$$
$$2{,}20 \cdot 720 \cdot 2{,}16 - 1{,}06\ (720 + 800) \cdot 0{,}53 = 8830\ \text{kg/m}.$$



Gewählt verdübelter Balken 2 · 26/26 cm □ nach nebenstehendem Querschnitt mit

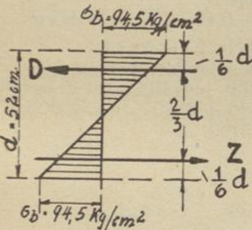
$$W = \frac{1}{6} \cdot 26 \cdot 52^2 = 11670\ \mathrm{cm}^3$$

und $W_n = 0{,}8$ *) $\cdot\ 11670 = 9360\ \mathrm{cm}^3$

$$\sigma_b = \frac{883000}{9360} = 94{,}5\ \mathrm{kg/cm}^2$$

$$(\sigma_{b\ \mathrm{zul}} = 100\ \mathrm{kg/cm}^2)$$

Zur Verbinduug der beiden Hölzer 26/26 cm □ sollen Vierkantdübel aus Hartholz verwandt werden.



Dübelanzahl:

Die gesamte — von jeder Trägerhälfte aufzunehmende — Schubkraft beträgt:

$$Q_s = D = Z = \frac{\max M}{\frac{2}{3}d} = \sigma_b \cdot \frac{1}{4} h \cdot b$$

$$= \frac{883000}{\frac{2}{3} \cdot 52} = 0{,}8 \cdot 94{,}5 \cdot \frac{1}{4} \cdot 52 \cdot 26 \simeq 25500\ \mathrm{kg}$$

Gewählt für jede Trägerhälfte 9 Stück Hartholzdübel 6/10 cm □ — 26 cm lang. Die Druckspannung an der Leibungsfläche beträgt:

$$\sigma_l = \frac{25500}{9 \cdot 3 \cdot 26} = 36{,}5\ \mathrm{kg/cm}^2$$

$(\sigma_{l\ \mathrm{zul}} = 40\ \mathrm{kg/cm}^2)$

und die Scherspannung im Dübel

$$\tau = \frac{25500}{9 \cdot 10 \cdot 26} = \sim 10{,}9\ \mathrm{kg/cm}^2$$

$(\tau_{\mathrm{zul}} = 20\ \mathrm{kg/cm}^2)$

Dübeleinteilung:

Nach Auftragung der Querkraftfläche ergeben sich die größten Schubkräfte in der linksseitigen Balkenhälfte.

Die Schubspannung beträgt beim rechteckigen Qnerschnitt in der mittleren Balkenzone $\tau = 1{,}5 \cdot \frac{Q}{F}$.

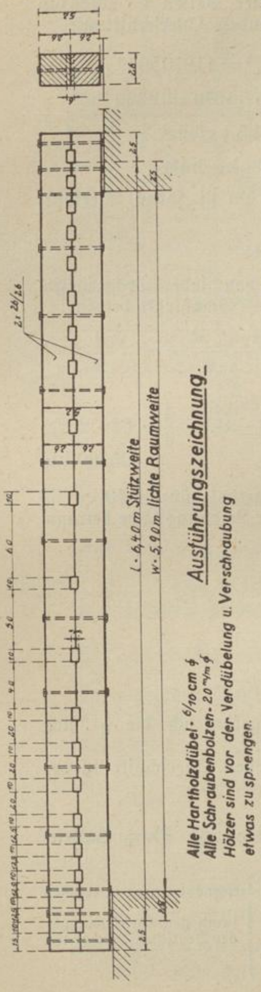
Hierin bedeutet Q = Balkenquerkraft in kg und F = Balkenquerschnitt in cm² $= 26 \cdot 52 = 1352\ \mathrm{cm}^2$.

*) Bei verdübelten oder verzahnten Balken ist das Widerstandsmoment zu rechnen

bei 2 Lagen $= W_n = 0{,}8 \cdot W = 0{,}8 \cdot \frac{1}{6} \cdot b \cdot h^2$

bei 3 Lagen $= W_n = 0{,}6 \cdot W = 0{,}6 \cdot \frac{1}{6} \cdot b \cdot h^2$

(nach den Bestimmungen der Deutschen Reichsbahn (BH).



Die Querkräfte betragen:

a) am Auflager A
$\max Q_A = A = 5600$ kg
in 0,50 m von A
$Q_{g1} = 5600 - 600 - 0{,}50 \cdot 720 = 4640$ kg

b) im Abstande 0,90 m von A
$\max Q_1 = 5600 - 600 - 0{,}90 \cdot 720 = 4350$ kg
$\min Q_1 = 4350 - 800 = 3550$ kg

c) im Abstande 1,80 m von A
$\max Q_2 = 3550 - 0{,}90 \cdot 720 = 2900$ kg
$\min Q_2 = 2900 - 1000 = 1900$ kg
in 2,20 m von A
$Q_{g2} = 1900 - 0{,}40 \cdot 720 = 1610$ kg

Die Schubkräfte betragen:

a) im Balkenteil $0 - 0{,}90$ m von A
$Q_m = \frac{1}{2}\,(5600 + 4640) = 5120$ kg
$\frac{1}{2}\,(4640 + 4350) = \sim 4500$ kg

$$Q_s = 1{,}50 \cdot \frac{5120}{52} \cdot 50 = 7400 \text{ kg}$$

$$1{,}50 \cdot \frac{4500}{52} \cdot 40 = 5200 \text{ kg}$$

zusammen 12600 kg

erforderliche Dübelschublänge:

$$e = \frac{12600}{10{,}9 \cdot 26} = 44{,}5 \text{ cm} = 4{,}45 \text{ Dübel.}$$

b) im Balkenteil $0{,}90 - 1{,}80$ m von A
$Q_{m1} = \frac{1}{2} \cdot (3550 + 2900) \simeq 3230$ kg

$$Q_{s1} = 1{,}50 \cdot \frac{3230}{52} \cdot 90 = 8400 \text{ kg}$$

erforderliche Dübelschublänge:

$$e = \frac{8400}{10{,}9 \cdot 26} = 29{,}6 \text{ cm} = 2{,}96 \text{ Dübel.}$$

c) im Balkenteil $1{,}80 - 3{,}26$ von A.
$Q_{m2} = \frac{1}{2} \cdot (1900 + 1610) = 1755$ kg
$\frac{1}{2} \cdot 1610 = 805$ kg

$$Q_{s2} = 1{,}50 \cdot \frac{1755}{52} \cdot 40 = 2040 \text{ kg}$$

$$1{,}50 \cdot \frac{805}{52} \cdot 106 = 2460 \text{ kg}$$

zusammen 4500 kg

erforderliche Dübelschublänge:

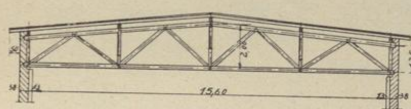
$$e = \frac{\cdot 4500}{10{,}9 \cdot 26} = 15{,}9 \text{ cm} = 1{,}59 \text{ Dübel}$$

$\Sigma Q_s = 12600 + 8400 + 4500 = 25560$ kg
Σ Dübel $= 4{,}45 + 2{,}96 + 1{,}59 = 9$ Stück.

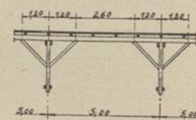
Die Dübelanordnung für die rechtsseitige Balkenhälfte wird gleich der linksseitigen gewählt. Aus praktischen Gründen werden für jede Balkenhälfte 10 Hartholzdübel — also insgesamt 20 Hartholzdübel 6/10 cm [] vorgesehen.

4. Berechnung eines freitragenden Daches von 16,00 m Stützweite.

Das Dach wird mit doppelter Pappe abgedeckt. Die Dachneigung beträgt $\sim 7^0$, der Binderabstand $= 5{,}00$ m. Die vorgesehene Gestaltung zeigt nebenstehendes Bild.



Querschnitt.



Teil-Längenschnitt.

Pos. 1, Sparren. $l = 4{,}00$ m.

Die Eigenlast des Daches beträgt nach DIN 1055 — Blatt 2, Nr. 83 $= 50$ kg/m².

Belastung für 1 m² Grundfläche:

$$\begin{aligned}
\text{Eigenlast} &= \frac{1}{\cos 7^0} \cdot 50 = \sim 51 \text{ kg/m}^2 \\
\text{Schnee} &= \ 75 \text{ kg/m}^2 \\
\text{Wind} = \sin^2 7^0 \cdot 125 &= \sim\ \ 2 \text{ kg/m}^2 \\
\text{zusammen} &\ \ 128 \text{ kg/m}^2
\end{aligned}$$

gerechnet rund $= 130$ kg/m²

$Q = 4{,}00 \cdot 1{,}00 \cdot 130 = 520$ kg

$\max M = 0{,}125 \cdot 520 \cdot 4{,}00 = 260$ kg/m

Gewählt 8/14 cm [] mit $W = 261$ cm³

$$\sigma_b = \frac{26000}{261} = \sim 100 \text{ kg/cm}^2$$

$(\sigma_{b\,zul} = 100 \text{ kg/cm}^2)$

Pos. 2, Pfetten. $l = 5{,}00 - 2 \cdot 1{,}20\,^{*)} = 2{,}60$ m

Dachlast nach Pos. 1	$= 130$ kg/m²
Eigenlast von Pfetten und Kopfbändern	$= 5$ kg/m²
zusammen	135 kg/m²

*) $2 \cdot 1{,}20 = 2{,}40$ m = Abzug der beiden Kopfbänder.

$Q = 2{,}60 \cdot 4{,}00 \cdot 135 = \sim 1400$ kg
max $M = 0{,}125 \cdot 1400 \cdot 2{,}60 = 455$ kg/m
Gewählt 10/18 cm [] mit $W = 540$ cm³

$$\sigma_b = \frac{45500}{540} = 84{,}5 \text{ kg/cm}^2$$

Die Traufpfetten liegen auf den Wänden und werden gewählt = 10/10 cm [].

Pos. 3. Kopfbänder. $l = 1{,}70$ m

$Q = {}^1/_2\,(1{,}20 + 2{,}60) \cdot 4{,}00 \cdot 135 = 1030$ kg

$$S = \frac{1}{1{,}20} \cdot 1030 \cdot 1{,}70 = -1460 \text{ kg}$$

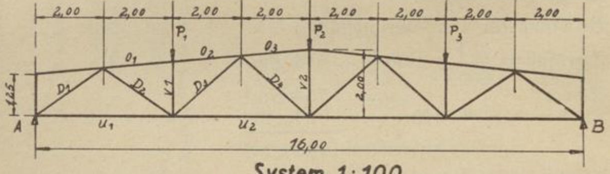
Gewählt 10/10 cm [] mit $F = 100$ cm²

$$i = 2{,}89 \text{ cm}; \ \lambda = \frac{170}{2{,}89} = 59; \ \omega = 1{,}85$$

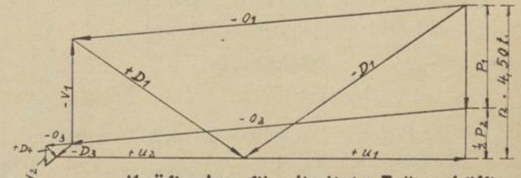
$$\sigma_d = \frac{1{,}85 \cdot 1460}{100} = 27 \text{ kg/cm}^2$$

Pos. 4. Dachbinder. — $l = 16{,}00$ m

Dachlast nach Pos. 2	=	135 kg/m²
Bindereigenlast	=	15 kg/m²
zusammen		150 kgm/²



System 1:100.



Kräfteplan für die linke Trägerhälfte.
1cm = 1ton
- - Druck + - Zug.

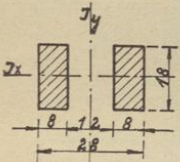
Knotenlasten:

$P_1 = P_2 = P_3 = 4{,}00 \cdot 5{,}00 \cdot 150 = 3000\ \text{kg}$
$A = B = 1^1/_2 \cdot 3000 = 4500\ \text{kg}.$

(Die Untersuchung der Binder auf wechselnde, einseitige Schnee- und Windlast erübrigt sich im allgemeinen, wenn die mittleren Füllstäbe (Diagonale und Vertikale) auf Zug und Druck angeschlossen werden).

Bestimmung der Stabquerschnitte:

Obergurt. Stab O_1 bis O_3.



$l = 2{,}00$ m bezw. $L = 4{,}00$ m
max $P = -12{,}35\ t$
Gewählt $2 \cdot 8/18$ cm [] mit $F = 288\ \text{cm}_2$

$$J_x = \frac{1}{12} \cdot 16 \cdot 18^3 = 7776\ \text{cm}^4$$

$$J_y = \frac{1}{12} \cdot 18 \cdot (28^3 - 12^3) = 30336\ \text{cm}^4$$

$$J_o = \frac{1}{12} \cdot 18 \cdot 16^3 = 6144\ \text{cm}^4$$

$$J_\omega = 6144 + \frac{1}{4}(30336 - 6144) = 12192\ \text{cm}^4$$

für $l = 2{,}00$ m | für $L = 4{,}00$ m

$$i_x = 0{,}289 \cdot 18 = 5{,}2\ \text{cm} \qquad i_y = \sqrt{\frac{12192}{288}} = 6{,}5\ \text{cm}$$

$$\lambda_x = \frac{200}{5{,}2} = 38{,}5 \qquad \lambda_y = \frac{400}{6{,}5} = 61{,}5$$

$$\max \omega = 1{,}91$$

$$\max \sigma_{d.} = \frac{1{,}91 \cdot 12350}{288} = 82\ \text{kg/cm}^2$$

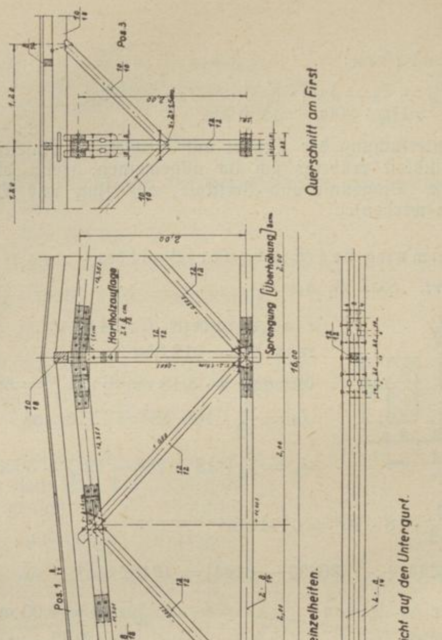
$$(\sigma_{d\,\text{zul}} = 80 + \frac{1}{6} \cdot 80 = 93\ \text{kg/cm}^2)$$

Untergurt. Stab U_1 und U_2. $l = 4{,}00$ m

max $P = +11{,}90\ t$
Gewählt $2 \cdot 8/14$ cm [] mit
$F_n = 0{,}75 \cdot 224 = 168\ \text{cm}^2$

$$\max \sigma_z = \frac{11900}{168} = 71\ \text{kg/cm}^2$$

$(\sigma_{z\ \text{zul}} = 90\ \text{kg/cm}^2)$


Querschnitt am First
Pos.3
Sprengung (Überhöhung) 8 cm
Hartholzauflage
16,00
Bindereinzelheiten.
Aufsicht auf den Untergurt.
Pos.1
Pos.2
doppelte Dachpappe auf Schalung
Hartholz
Platte
Alle Hartholzdübel
Alle Schraubenbolzen

Diagonale. *Stab* $D_1 \cdot l = 2{,}50\,\mathrm{m}$
$P = -7{,}90\,t$
Gewählt 14/14 cm [] mit $F = 196\,\mathrm{cm}^2$
$i = 4{,}04\,\mathrm{cm};\ \lambda = \frac{250}{4{,}04} = 62;\ \omega = 1{,}92$
$\sigma_d = \frac{1{,}92 \cdot 7900}{196} = 77{,}5\,\mathrm{kg/cm}^2$
$(\sigma_{d\,\mathrm{zul}} = 80\,\mathrm{kg/cm}^2)$

Desgleichen. *Stab* D^2. $l = 2{,}50\,\mathrm{m}$
$P = +6{,}10\,t$
Gewählt 12/14 cm [] mit
$F_n = 0{,}70 \cdot 168 = \sim 117\,\mathrm{cm}^2$
$\sigma_z = \frac{6100}{117} = 52\,\mathrm{kg/cm}^2$
$(\sigma_{\mathrm{zul}} = 90\,\mathrm{kg/cm}^2)$

Desgleichen. *Stab* D_3 *und* D_4. $l = 2{,}70\,\mathrm{m}$
$P = -0{,}60$ bezw. $+0{,}50\,t$
gewählt aus praktischen Gründen 12/12 cm []
σ_d bezw. σ_z = gering.

Vertikale. *Stab* V_1. $l = 1{,}65\,\mathrm{m}$
$P = -3{,}00\,t$
Gewählt 10/12 cm [] mit $F = 120\,\mathrm{cm}^2$
$i = 2{,}89\,\mathrm{cm};\ \lambda = \frac{165}{2{,}89} = 57;\ \omega = 1{,}81$
$\sigma_d = \frac{1{,}81 \cdot 3000}{120} = 45{,}3\,\mathrm{kg/cm}^2$

Desgleichen. *Stab* V_2. $l = 2{,}00\,\mathrm{m}$
$P = -0{,}6\,t$
Gewählt aus praktischen Gründen 12/12 cm [] mit $F = 144\,\mathrm{cm}^2$
σ_d = gering.

Auflagerplatte unter A und B
max P = wie vor $A = B = 4500$ kg
Gewählt Stahlplatte 20 · 30 · 1 cm
Mauerwerksbeanspruchung: $\sigma_d = \frac{4500}{20 \cdot 30}\ 7{,}5\,\mathrm{kg/cm}^2$

Die Kraftübertragung an den Knotenpunkten erfolgt durch Versätze und Hartholzdübel. An Stelle letzterer können Rund-Ring- oder Einpreßdübel Verwendung finden.