

Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

Erläuterungen der kästnerischen Analysis endlicher Größen

Langsdorf, Karl Christian

Mannheim, 1776

§. 95. Aus der Lehre von den Combinationen ist klar, daß sich aus fünf Größen zehen verschiedene Verbindungen nach dreien machen lassen [...]

[urn:nbn:de:bsz:31-412388](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:bsz:31-412388)

dieses giebt

$$a - z = \sqrt{b - z^2}$$

und

$$a^2 - 2az + z^2 = b - z^2$$

folglich

$$z^2 = az + \frac{b - a^2}{2}$$

welches eine unreine quadratische Gleichung ist, worauf die in der Aufgabe gegebene Stücke unmittelbar führen, und die sich erst aus 78. auflösen läßt, wenn man daselbst $p = a$ und $q = \frac{b - a^2}{2}$ setzt. Aber nach der Voraussetzung des

13. S. Trig. kommt man auf eine reine quadratische Gleichung, deren Auflösung sich schon aus 75. ergibt.

Dieses ist ein Beweis, wie man durch die Verbindung anderswoher bekannter Eigenschaften der unbekannten Größen mit denen, welche in der Aufgabe selbst gegeben sind, oft auf weit weniger verwickelte Gleichungen kommt, als wenn man bloß aus den in der Aufgabe selbst bestimmten Eigenschaften der gesuchten Größen eine Gleichung zwischen gegebenen und gesuchten Größen herleiten wollte.

§. 95.

Aus der Lehre von den Combinationen ist klar, daß sich aus fünf Größen zehn verschiedene Ver-

Verbindungen nach dreien machen lassen; da nun jedesmal durch drei von den fünf Größen a , u , n , d , s die beiden übrigen bestimmt werden, so erhellet, daß es in der Lehre von den arithmetischen Progressionen gehen verschiedene Aufgaben giebt, die ich hier nach der Reihe hersehen will.

I.

Aus dem ersten Glied, dem letzten und der Zahl der Glieder, die Summe und die Differenz der Glieder zu finden.

Aufl.

$$1.) f = \frac{(a+u) \cdot n}{2} \quad \S. 85. 86.$$

und $u = (n-1) d + a \quad \S. 87.$

also $2.) d = \frac{u-a}{n-1};$

Um also zwischen zwei Zahlen a und u , in mittlere arithmetische Proportionalzahlen zu finden, setze man nur in diesen Gleichungen $m+2$ statt n ; dadurch ergiebt sich

$$d = \frac{u-a}{(m+2)-1} = \frac{u-a}{m+1}$$

Ex. Es sei $a=3$, $u=17$, $m=5$, so ist

$$d = \frac{17-3}{5+1} = \frac{14}{6} = 2\frac{1}{3}$$

U 3

und

und die Reihe demnach folgende

$$3, 5\frac{1}{2}, 7\frac{1}{2}, 10, 12\frac{1}{2}, 14\frac{1}{2}, 17$$

II.

Aus den beiden äußersten Gliedern a , u , nebst der Differenz d , die Zahl der Glieder und ihre Summe zu finden.

Aufsl. Aus der Gleichung $d = \frac{u-a}{n-1}$ in I. folgt

$$n-1 = \frac{u-a}{d}, \text{ folglich}$$

$$1.) n = \frac{u-a}{d} + 1$$

$$\text{und } f = \frac{n \cdot (a+u)}{2} = \frac{(u-a) \cdot (u+a)}{2d} + \frac{a+u}{2} \text{ oder}$$

$$2.) f = \frac{u^2 - a^2 + (a+u) d}{2d}$$

Es kann sich zutragen, daß die Gleichung

$$n = \frac{u-a}{d} + 1 = \frac{u-a+d}{d}$$

für n einen Bruch giebt. In diesem Fall zeigt der Werth von n an, daß die Reihe, deren Gestalt schon durch die beiden Stücke a und d bestimmt ist, eigentlich kein Glied enthält, das dem gegebenen u gleich wäre, sondern daß es zwischen zwei in dieser Progression befindlichen Gliedern

Gliedern liegt. Ist z. B. $a = 4$, $d = 3$, $u = 27$
 so erhält man $n = \frac{27 + 3 - 4}{3} = \frac{26}{3} = 8\frac{2}{3}$, wobei

sich dem ersten Anblick nach nichts denken läßt.
 Folgende Betrachtung aber wird zeigen, was eigent-
 lich ein solcher Ausdruck bedeute. Da $a = 4$,
 $d = 3$, so ist die Gestalt der Reihe folgende:

4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28 --- (Q.)
 wo das achte Glied 25, und das neunte 28 ist,
 die Anzahl der Glieder muß also kleiner als 9,
 aber größer als 8 sein, weil $u = 27$ zwischen die
 beiden Glieder 25, 28 fällt. Aus der Gleichung
 $n = 8\frac{2}{3}$ ist überdas auch bestimmt, wo eigentlich
 das gegebene letzte Glied u zwischen 25 und 28 liegt;
 die Entfernung des 8ten Gliedes vom nten soll
 nämlich zwei Dritttheile von der Entfernung des
 8ten vom 9ten Gliede betragen; d. h. wenn man
 zwischen 25 und 28 noch zwei mittlere arithmeti-
 sche Proportionalzahlen sucht, wofür man 26 und
 27 erhält, so hat man diese vier Zahlen 25,
 26, 27, 28, und man gelangt von 25 zu 28,
 wenn man der arithmetischen Reihe gemäß steigt,
 durch drei Stufen, wo 28 von 25 um diese drei,
 und 27 von 25 um zwei solcher Stufen entfernt ist.

Da nun des nten Glieds u Entfernung von
 25, $\frac{2}{3}$ soviel, als die Entfernung des Gliedes
 28 von 25 beträgt, so ist klar, daß, da man in
 Q von 25 zu 27 durch zwei Stufen gelangt, der-
 gleichen 25 von dem in der Reihe Q zunächst
 21 4 folgen-

folgenden Gliede um drei absteht, 27 das gesuchte nte oder 8 $\frac{2}{3}$ te Glied in Q ist, wie sich aus der Gleichung ergab.

Kommt man also auf einen Werth von n, der $= b + \frac{m}{q+1}$, so, daß $m < q+1$, so ist die Bedeutung hiervon eigentlich diese: das gegebene Glied u liegt zwischen dem bten und b+1ten Gliede der schon bestimmten Reihe, und wenn man zwischen diesen beiden Gliedern q mittlere arithmetische Proportionalzahlen sucht, so ist das nte Glied von diesen das gegebene, also in der bestimmten Reihe (wie Q) das nte.

Man kann sich dieses auch so vorstellen, welches mit dem bisherigen beinahe einerlei ist.

Jede arithmetische Progression läßt sich in eine andere von mehreren Gliedern verwandeln, so daß die schon vorhandenen Glieder alle stehen bleiben, wenn man nämlich vor jedes Glied andere Zahlen setzt, die mit den schon vorhandenen eine einzige arithmetische Progression ausmachen. Kommt man also auf einen Werth von n,

der $= b + \frac{m}{q+1}$, so kann man allemal vor jedes

Glied der Reihe, deren Gestalt schon bestimmt ist, noch q Glieder setzen, die mit den schon vorhandenen in einer arithmetischen Progression fortgehen. Auf diese Art wird aus der Reihe Q diese

der Kästnerischen Anal. endl. Größen. 9

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13,
14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24,
25, 26, 27, 28;

Hier ist 4 das dritte in Q das 1te, 7 das
sechste in Q das zweite, 10 das 9te in Q das
dritte u. s. f. überhaupt das nte in Q ist hier das
3te Glied, folglich das 8^{te} oder 2^{te} Glied in
Q hier das 26te. Auf diese Art wird begreif-
lich, was n eigentlich bedeute, wenn es ein un-
eigentlicher Bruch ist.

III.

Aus dem letzten Glied, der Zahl der Glie-
der und der Differenz, das erste Glied und die
Summe zu finden.

Aufl. Aus $u = a + (n-1) d$ folgt

$$1.) a = u + (1-n) d$$

und

$$2.) f = \frac{(a + u) n}{2}$$

$$= \frac{(u + (1-n) d + u) \cdot n}{2}$$

$$= \frac{(2u + (1-n) d) \cdot n}{2}$$

IV.

Aus dem ersten Glied, dem letzten, und der
Summe die Differenz nebst der Zahl der Glie-
der zu finden.

A 5

Aufl.

Ausf. Da $f = \frac{(a+u)n}{2}$

so ist 1.) $n = \frac{2f}{a+u}$

Ferner ist $d = \frac{u-a}{n-1}$

$$= \frac{u-a}{\left(\frac{2f}{a+u}\right) - 1}$$

$$= \frac{u-a}{\left(\frac{2f-(a+u)}{a+u}\right)} : a+u \text{ also}$$

2.) $d = \frac{u^2 - a^2}{2f - (a+u)}$

V.

Aus dem letzten Glied, der Differenz der Reihe, und der Summe, das erste Glied nebst der Zahl der Glieder zu finden.

Ausf. Aus $d = \frac{u^2 - a^2}{2f - (a+u)}$ ergibt sich

$$2df - ad - ud = u^2 - a^2$$

also

$$a^2 - ad = u^2 + ud - 2df$$

und

$$a^2 - ad + \frac{1}{4}d^2 = u^2 + ud - 2df + \frac{1}{4}d^2$$

oder

$$\left(a - \frac{1}{2}d\right)^2 = \left(u + \frac{1}{2}d\right)^2 - 2df$$

folglich

$$a - \frac{1}{2}d = \sqrt{\left(u + \frac{1}{2}d\right)^2 - 2df}$$

und daher

$$1.) a = \frac{1}{2}d \pm \sqrt{\left(u + \frac{1}{2}d\right)^2 - 2df}$$

Man

der Kästnerischen Anal. endl. Größen. II

Man hat ferner aus III

$$\begin{aligned} 2f &= (2u + d - dn). n \\ &= 2un + dn - dn^2 \end{aligned}$$

Dies giebt

$$\frac{2f}{d} = \frac{2un}{d} + n - n^2,$$

und

$$n^2 - \frac{(2u + d)n}{d} = \frac{2f}{d};$$

$$n^2 - \left(\frac{2u + d}{d}\right)n + \left(\frac{2u + d}{2d}\right)^2 = \frac{2f}{d} + \left(\frac{2u + d}{2d}\right)^2$$

folglich

$$n - \frac{2u + d}{2d} = r \left(\frac{8df + (2u + d)^2}{4d^2} \right)$$

und

$$n = \frac{2u + d \pm r(8df + (2u + d)^2)}{2d}$$

VI.

Aus dem ersten Glied, der Zahl der Glieder und der Summe, die Differenz und das letzte Glied zu finden.

Aufsl. Weil $f = \frac{(a + u). n}{2}$, so hat man

$$2f = an + un,$$

also

$$1.) u = \frac{2f - an}{a}$$

Hieraus

Hieraus ergibt sich

$$\begin{aligned} d &= \frac{u - a}{n - 1} \\ &= \frac{2f - an}{n} - a \\ &= \frac{(2f - an - an): n}{n - 1} \quad \text{oder} \end{aligned}$$

$$2.) \quad d = \frac{2(f - an)}{n \cdot (n - 1)}$$

VII.

Aus dem letzten Glied, der Zahl der Glieder, und der Summe, das erste Glied und die Differenz zu finden.

Aufl. Aus $u = \frac{2f - an}{n}$ folgt

$$un = 2f - an, \text{ also}$$

$$1.) \quad a = \frac{2f - un}{n}$$

Demnach $d = \frac{u - a}{n - 1}$

$$= u - \left(\frac{2f - un}{n} \right)$$

$$= \frac{un - 2f + un}{n \cdot (n - 1)}$$

oder

$$2.) \quad d = \frac{2(un - f)}{n \cdot (n - 1)}$$

VIII.

VIII.

Aus der Differenz, der Zahl der Glieder, und der Summe, das erste und letzte Glied zu finden.

Aufl. Die Gleichung (VI.) $d = \frac{2(f-an)}{n(n-1)}$

giebt $\frac{d \cdot n \cdot (n-1)}{2} = f - an$, also

$$1.) a = \frac{2f - n \cdot (n-1) \cdot d}{2n}$$

Eben so giebt die Gleichung (VII. 2.)

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot d}{2} = un - f, \text{ mithin}$$

$$2.) u = \frac{n \cdot (n-1) \cdot d + 2f}{2n}$$

IX.

Aus dem ersten Glied, der Zahl der Glieder, und der Differenz, das letzte und die Summe zu finden.

Aufl. Es ist

$$1.) u = a + (n-1) d$$

$$\text{und daher } f = \frac{(a+u) \cdot n}{2} = \frac{(a+a+(n-1)d) \cdot n}{2} \text{ also}$$

$$2.) f = \frac{2an + (n^2 - n) d}{2}$$

X.

X.

Aus dem ersten Glied, der Differenz, und der Summe, das letzte und die Zahl der Glieder zu finden.

Ausf. Aus (IX. 2.) ist

$$2f = dn^2 + (2a - d)n$$

$$\frac{2f}{d} = n^2 + \left(\frac{2a - d}{d}\right)n$$

Folglich

$$n^2 + \left(\frac{2a - d}{d}\right)n + \left(\frac{2a - d}{2d}\right)^2 = \frac{2f}{d} + \left(\frac{2a - d}{2d}\right)^2$$

und

$$\begin{aligned} n + \frac{2a - d}{2d} &= \sqrt{\left(\frac{2f}{d} + \left(\frac{2a - d}{2d}\right)^2\right)} \\ &= \sqrt{\frac{8df + (2a - d)^2}{2d}} \end{aligned}$$

Hieraus wird

$$1.) \quad n = \frac{d - 2a \pm \sqrt{8df + (2a - d)^2}}{2d}$$

Ferner $f = \left(\frac{a + u}{2}\right) \cdot n$

$$= \left(\frac{a + u}{2}\right) \cdot \left(\frac{u - a + d}{d}\right)$$

$$= \frac{u^2 - a^2 + du + da}{2d}$$

also

$$2df = u^2 - a^2 + du + da;$$

und

$$2df + a^2 - da = u^2 + du$$

$$2df + a^2 - da + \frac{1}{4}d^2 = u^2 + du + \frac{1}{4}d^2$$

Dieses

Dieses giebt

$$r(2df + a^2 - da + \frac{1}{4}d^2) = u + \frac{1}{2}d$$

folglich

$$2.) u = -\frac{1}{2}d \pm r(2df + a^2 - da + \frac{1}{4}d^2)$$

$$= -\frac{1}{2}d \pm r(2df + (a - \frac{1}{2}d)^2)$$

Ex. Man trift mit einem Arbeiter den Accord, daß man ihm bei Grabung eines Brunnens für den ersten Fuß 8 Gr., für den zweeten 10, für den dritten 12 u. s. f. für jeden folgenden allemal 2 Gr. mehr, als für den zunächst vorhergehenden geben wolle. Darauf zahlt man ihm 10 Thlr. zum voraus: wie tief ist er nun zu graben verbunden?

Man hat hier das erste Glied, die Differenz, und die Summe einer arithmetischen Progression, nämlich $a = 8$, $d = 2$, und $f = 10$ Thlr. = 360 Gr. Daraus erhält man

$$n = \frac{2 - 16 + r(8 \cdot 2 \cdot 360 + (16 - 2)^2)}{4}$$

$$= \frac{-14 + r 5956}{4}$$

$$= \frac{-14 + 77,1}{4} = 15,7$$

weil sich hier nur das obere Zeichen vor dem Wurzelzeichen gebrauchen läßt. Der Arbeiter ist demnach verbunden, 15, 7 Fuß für die vorauszahlte 10 Thlr. zu graben. Würde er in der Arbeit verhindert, daß er nur 10 Fuß tief graben könnte, so ergäbe sich aus (IX. 2.), wieviel er

er dem, der die Arbeit bis auf 15, 7. Fuß fortsetzte, herausgeben müßte; er selbst bekäme nämlich in diesem Fall

$$\frac{2 \cdot 8 \cdot 10 + (100 - 10) \cdot 2}{2}$$

$$= 170 \text{ Gr.} = 4 \text{ Thlr. } 26 \text{ Gr.}$$

und müßte also dem zweiten Arbeiter 5 Thlr. 10 Gr. abgeben.

§. 102.

Auch hier lassen sich, wie in 95, zehn verschiedene Aufgaben machen. Nämlich

I.

Aus dem ersten Glied, dem Exponenten, und der Zahl der Glieder, das letzte und die Summe zu finden.

Aufl. Aus 96 erhält man 1.) $u = e^{n-1}a$, und aus 98 ergibt sich der Werth von f , den man noch leichter so findet: es ist

$$f = a + ea + e^2a + e^3a + \dots + e^{n-1}a, \text{ also}$$

$$ef = ea + e^2a + e^3a + e^4a + \dots + e^na$$

und $ef - f$ oder

$$(e-1) \cdot f = (ea + e^2a + \dots + e^{n-1}a + e^na) - (a + ea + \dots + e^{n-1}a)$$

$$= e^na - a, \text{ folglich}$$

$$2.) f = \frac{e^na - a}{e - 1}$$

II.