

Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

Erläuterungen der kästnerischen Analysis endlicher Größen

Langsdorf, Karl Christian

Mannheim, 1776

§. 155. Wenn a_b die Seite eines ordentlichen Vielecks, und a_i die Seiten
von einem Vieleck, das doppelt so viel Seiten hat [...]

[urn:nbn:de:bsz:31-412388](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:bsz:31-412388)

Nun ist $\sin. \psi =$

$$\frac{r(m+n+p) \cdot (m+n-p) \cdot (m+p-n) \cdot (n+p-m)}{2mn}$$

folglich $r =$

$$\frac{mnp}{r((m+n+p) \cdot (m+n-p) \cdot (m+p-n) \cdot (n+p-m))};$$

Setzt man hier $m = n = p$, so ergebe sich für das gleichseitige Dreieck

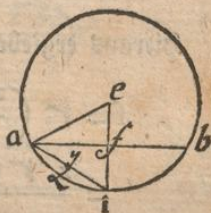
$$r = \frac{m^3}{r(3m \cdot m \cdot m)} = \frac{m^3}{m^2 r_3}$$

$$= \frac{m}{r_3}, \text{ oder } m = r r_3$$

welches die Gleichung im Buche ist.

§. 155.

Wenn ab die Seite eines ordentlichen Vielecks, und ai die Seite von einem Vieleck, das doppelt so viel Seiten hat, ist, so sei $ab = f$, $ai = z$, $ei = ea = r$, so ist $z^2 = \frac{1}{4}f^2 + fi^2$ und $z = r(\frac{1}{4}f^2 + fi^2)$;



Nun ist $ef + fi = r$, also $if = r - fe$, und da überdas $ef^2 = ea^2 - af^2 = r^2 - \frac{1}{4}f^2$, so ergebe sich

$$z = r(\frac{1}{4}f^2 + fi^2)$$

$$= r(\frac{1}{4}f^2 + (r - ef)^2)$$

Es 2

= r

$$\begin{aligned}
 &= r \left(\frac{1}{4} f^2 + \left(r - r \left(r^2 - \frac{1}{4} f^2 \right) \right)^2 \right) \\
 &= r \left(\frac{1}{4} f^2 + r^2 - 2r r \left(r^2 - \frac{1}{4} f^2 \right) + r^2 - \frac{1}{4} f^2 \right) \\
 &= r \left(2r^2 - 2r r \left(r^2 - \frac{1}{4} f^2 \right) \right) \quad (P.)
 \end{aligned}$$

und wenn man nun umgekehrt f aus z sucht, so erhält man, in P. auf beiden Seiten quadriert,

$$z^2 = 2r^2 - 2r r \left(r^2 - \frac{1}{4} f^2 \right) \text{ also}$$

$$2r^2 - z^2 = 2r r \left(r^2 - \frac{1}{4} f^2 \right)$$

und hier auf beiden Seiten quadriert, giebt

$$\begin{aligned}
 4r^4 - 4r^2 z^2 + z^4 &= 4r^2 \cdot \left(r^2 - \frac{1}{4} f^2 \right) \\
 &= 4r^4 - r^2 f^2,
 \end{aligned}$$

folglich

$$\begin{aligned}
 r^2 f^2 &= 4r^4 - 4r^2 z^2 + z^4 \\
 &= 4r^2 z^2 - z^4
 \end{aligned}$$

$$\text{und } f^2 = \frac{4r^2 z^2 - z^4}{r^2}$$

$$= \frac{z^2 \cdot (4r^2 - z^2)}{r^2}$$

Hieraus ergibt sich endlich

$$\begin{aligned}
 f &= r \left(\frac{z^2 \cdot (4r^2 - z^2)}{r^2} \right) \\
 &= \frac{z \cdot r (4r^2 - z^2)}{r};
 \end{aligned}$$

Es sei z die Seite eines Sechsecks, so ist $z = r$, und man erhält die Seite des Dreiecks = $\frac{r \cdot r (4r^2 - r^2)}{r} = r (4r^2 - r^2) = r \cdot r \cdot 3$, wie 153.

§. 159.