

Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

Erläuterungen der kästnerischen Analysis endlicher Größen

Langsdorf, Karl Christian

Mannheim, 1776

§. 349. Von hier geht die Lehre von den Kegelschnitten an, die in der
Ausübung von ungemeinem Nutzen sind, und [...]

[urn:nbn:de:bsz:31-412388](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:bsz:31-412388)

für die Fälle, da ein verneintes x größer als $\frac{ac}{b}$ ist, $y = \frac{b}{a} \cdot \left(- \left(\frac{ac}{b} + e \right) \right) + c = - \left(c + \frac{be}{a} \right) + c = - \frac{be}{a}$ also auch verneint, und die verneinte Funktion wird also für Abscissen, die $= - \left(\frac{ac}{b} - e \right)$ sind, wieder bejaht, daß also in allen Fällen so wohl für bejahte als verneinte Abscissen x eine bejahte Funktion von y ist; nur die Fälle ausgenommen, da x zwischen 0 und $-\frac{ac}{b}$ fällt.

§. 349.

Von hier geht die Lehre von den Kegelschnitten an, die in der Ausübung von ungemeinem Nutzen sind, und schon von den ältesten Zeiten her die Aufmerksamkeit der Geometer auf sich gezogen haben. Die Alten bemerkten nämlich, daß man durch Zerschneidung eines Kegels verschiedene Arten von krummen Linien erhalte, wozu sie zwar anfangs mehr aus Curiosität, als aus Betrachtung ihres Nutzens, geleitet wurden; in der Folge bemerkte man aber überall den ausgebreiteten Nutzen dieser Linien, und suchte ihre Eigenschaften besonders durch die Analysis immer mehr zu entwickeln. Hier kommt bis auf 467. nur das nothwendigste davon vor. In dem Buche

Buche werden die Gleichungen für diese Linien als bekannt angenommen, und daraus ihre Eigenschaften hergeleitet; um indessen Anfängern zu zeigen, wie sich dergleichen Linien aus Regeln schneiden lassen, und wie man aus Betrachtung des Kegels Gleichungen für diese Linien herleiten kann, wird es nicht unnütz seyn, folgendes hier zu bemerken.

I.

BDMNCOD sei ein senkrechter Kegel, BCD ein Durchschnitt durch ihn, in dessen Ebene des Kegels Axc liegt; nun lege man durch irgend einen Punkt in BC als A eine Ebene parallel mit BD und senkrecht auf BDC, so heißt die Linie im TAß, worin diese Ebene des Kegels Oberfläche schneidet, eine Parabel; die grade Linie Ad, worin die schneidende Ebene den Axen Triangel BDC schneidet, heißt der Parabel Axc, auch ihr Hauptdurchmesser, und A ihr Scheitel.

II.

Man stelle sich durch irgend einen Punkt in AC, als n, eine Ebene durch des Kegels Axc BF senkrecht gelegt vor, so lehrt die Geometrie, daß die Linie ntrpn, worin diese Ebene des Kegels Oberfläche schneidet, ein Kreis ist, und nr ist sein Durchmesser; zieht man nun aus s, dem Punkt, wo der Parabel und des Kreises Durch-

Durchmesser einander schneiden, eine grade Linie st senkrecht auf nr , so wird st auch senkrecht auf Ad der Parabel Are ; oder st ist zugleich die zur Abscisse $As = x$ und zu ns gehörige senkrechte Ordinate y . Es ist demnach

$$ns : st = st : sr,$$

also $st^2 = ns \cdot sr$ P.)

Nun ist

$$Br : rn = As : sn$$

also $ns = \frac{As \cdot nr}{Br}$

Dieß in P. gesetzt, giebt

$$st^2 = \frac{As \cdot nr}{Br} \cdot sr \quad Q.)$$

und da der Punkt s offenbar, wo man will, liegen kann, und die Gleichung Q. allemal richtig bleibt, so hat man allgemein, statt As , x , und statt st , y gesetzt

$$y^2 = \frac{rn}{Br} \cdot sr \cdot x$$

$$= \frac{rn}{Br} \cdot AL \cdot x$$

aber $rn : Br = ns : As = ns : x$,

also $y^2 = \frac{ns}{x} \cdot AL \cdot x$ R.)

wie man auch unmittelbar aus P. hätte schließen können.

III. Man

III.

Man mag x und y so groß nehmen, als man will, so behält offenbar $\frac{ns}{x}$ sowohl, als AL immer einerlei Größe; folglich ist $\frac{ns}{x}$. AL eine beständige Größe, die man gewöhnlich, wie auch hier im Buche geschehen, mit dem Buchstaben a bezeichnet, wodurch sich dann die Gleichung R in die im Buche verwandelt, nämlich

$$y^2 = ax;$$

Da diese beständige Größe a das Maas ist, wornach man die Verhältniß der Abscissen und Ordinaten gegen einander beurtheilt, und da sie überdas durch lauter Linien AL , nr , Br , welche nicht in der Ebene der Parabel selbst, sondern neben ihr in dem Regel liegen, bestimmt wird, so hat man sie den Parameter (Nebenmesser) genannt.

IV.

Auf einem gegebenen Regel BCD den Punkt zu finden, aus welchem sich eine gegebene Parabel schneiden läßt, oder ihren Scheitelpunkt auf des Regels Fläche anzugeben.

Aufl. Nach der Aufgabe ist der Punkt B und $\frac{y^2}{x}$ gegeben; es ist aber

$$\frac{y^2}{x} = \frac{ns}{x} \cdot AL$$

Ⓖ

=

$$= \frac{\sin B}{\sin (90^\circ - \frac{1}{2} B)}, AL = \frac{\sin B}{\operatorname{Cof} \frac{1}{2} B} \cdot AL;$$

$$\text{Da nun } AL : \sin B = AB : \sin (90^\circ - \frac{1}{2} B) \\ = AB : \operatorname{Cof} \frac{1}{2} B$$

$$\text{mithin } AL = \frac{AB \cdot \sin B}{\operatorname{Cof} \frac{1}{2} B}$$

$$\text{so wird } y^2 : x = \frac{\sin B}{\operatorname{Cof} \frac{1}{2} B} \cdot \frac{AB \cdot \sin B}{\operatorname{Cof} \frac{1}{2} B} \\ = \frac{AB \cdot \sin B^2}{\operatorname{Cof} \frac{1}{2} B^2} \\ = a;$$

Folglich

$$AB = \frac{y^2 \cdot \operatorname{Cof} \frac{1}{2} B^2}{x \cdot \sin B^2} \text{ S.)} \\ = \frac{a \cdot \operatorname{Cof} \frac{1}{2} B^2}{\sin B^2};$$

welches die Entfernung des gesuchten Punktes A von des Kegels Spitze ist.

Er. Man soll aus einem Kegel, dessen Scheitelwinkel B 30° beträgt, eine Parabel schneiden, in der allemal das Quadrat der Ordinate doppelt so groß, als die zugehörige Abscisse ist: man sucht die Stelle A, wo der Schnitt diese Parabel giebt.

Hier

Hier ist in S, $\frac{y^2}{x} = 2,$

$$\log \text{Cof } \frac{1}{2} B = 9,9849438$$

$$\text{also } \log (\text{Cof } \frac{1}{2} B)^2 = 19,9698876$$

$$\text{und } \log \sin B = 9,6989700$$

$$\text{mithin } \log \sin B^2 = 19,3979400$$

und hieraus folgt

$$\log (\text{Cof } \frac{1}{2} B)^2 - \log \sin B^2 = 0,5719476$$

die hierzu gehörige Zahl ist 3,732; werden also x

und y in Zollen ausgedrückt, so, daß $\frac{y^2}{x} = a = 2,$

so wird aus (S.) die Entfernung des gesuchten Punktes A von des Kegels Spitze B oder

$$AB = 2 \cdot 3,732'' = 7''4'''6''4''$$

V.

Die in IV. gefundene Gleichung giebt

$$y^2 = \frac{AB \cdot \sin B^2 \cdot x}{\text{Cof } \frac{1}{2} B^2}$$

welche mit der Gleichung in II. für die Parabel völlig einerlei ist, nur daß man hier andere Größen substituirt hat.

VI.

Es ist eine Parabel nebst der Entfernung des Punktes A, wo man den Kelgel schneiden soll, von des Kegels Spitze B gegeben, man soll den Kelgel finden, aus dem sich die gegebene Parabel schneiden läßt.

G 2

Auf.

Auf. Den Winkel finden, heißt hier den Winkel finden, den zwei Linien DB, CB, an des Kegels Scheitel B auf seiner Fläche mit der Axe BF in einer Ebene gezogen, mit einander machen. Es folgt aber aus V.

$$\frac{\sin B^2}{\cos \frac{1}{2} B^2} = \frac{y^2}{AB \cdot x}$$

oder, wie die Trigonometrie zeigt

$$\left(\frac{1 - \cos B^2}{1 + \cos B^2} \right) = \frac{y^2}{AB \cdot x};$$

$$\begin{aligned} \text{also} \quad \frac{y^2}{AB \cdot x} &= \frac{2 \cdot (1 - \cos B^2)}{1 + \cos B} \\ &= \frac{2 \cdot (1 + \cos B) \cdot (1 - \cos B)}{1 + \cos B} \\ &= 2 \cdot (1 - \cos B) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{und daher} \quad \cos B &= 1 - \frac{y^2}{2 AB \cdot x} \\ &= \frac{2 AB \cdot x - y^2}{2 AB \cdot x} \end{aligned}$$

Ex. Es sei $AB = 4''$, $x = 3''$, $y = 2''$, so ist $\cos B$
 $= \frac{2 \cdot 4 \cdot 3 - 4}{2 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{20}{24} = 0,83333 \dots$ welches
 der Cosinus von $33^\circ 35'$; ist, also ist $B = 33^\circ 35'$;
B