

Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

**Erläuterungen der kästnerischen Analysis endlicher
Größen**

Langsdorf, Karl Christian

Mannheim, 1776

§. 389. Erkl. I. BDC sei wieder ein Axentriangel eines Kegels; senkrecht auf ihn werde nach der Richtung dA eine Ebene so gelegt [...]

[urn:nbn:de:bsz:31-412388](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:bsz:31-412388)

daß die beiden Schnitte Ad, CD, ähnliche Ellipsen geben; sollen also CD und AN auch ähnliche Ellipsen seyn, so wären nothwendig auch AN und Ad unter sich ähnlich, welches nicht seyn kann, weil sonst aus Q allemal

$$\begin{aligned} \text{Ad} : \text{AN} &= \text{AB. sin dAC} : \text{AB. sin NAC} \\ &= \text{sin dAC} : \text{sin NAC} \end{aligned}$$

seyn müßte, welches offenbar falsch ist, und hieraus ist klar, daß auch die Voraussetzung, daß Schnitte, die unter ungleichen Winkeln NAC, DCF geschehen, ähnliche Ellipsen darstellen können, falsch sein müsse.

§. 389. Anm. (b)

Daraus folgt auch, wie die gemeine Geometrie schon lehrt, daß alle Kreise einander ähnlich sind, weil ihre Gleichung $y^2 = ax - x^2$ nur eine beständige Größe a enthält.

§. 389. Erkl.

I.

BDC sei wieder ein Arentriangel eines Kegels; senkrecht auf ihn werde nach der Richtung dA eine Ebene so gelegt, daß $\text{dAC} = \beta < \alpha$ ist, so heißt die krumme Linie $\text{vTA}\phi\psi$, worin die Ebene des Kegels Oberfläche schneidet die Hyperbel; aber offenbar ist das Stück $\text{vTA}\phi\psi$,
§ 2 das

(b) Dieser und der folgende §. sind in der Ausgabe, der ich mich bediene, beide mit 389. bezeichnet, wie auch §. 721.

das sich so ergibt, nicht die ganze Hyperbel, sondern man kann sich BC , BD und die schneidende Ebene nach beiden Seiten ober und unter B verlängert vorstellen, und es ist klar, daß man auf diese Art einen doppelten Regel $BCDB$ erhält, dessen beide Hälften $B\alpha\zeta$, BDC sind, und dessen Ase eine einzige grade Linie αE ist. Wird nun die schneidende Ebene gehörig verlängert, so ist klar, daß die Hyperbel nicht nur in der untern Hälfte zweene Schenkel $A\gamma$, $A\psi$ hat, die bis ins Unendliche fortgehen, sondern daß ihr außerdem noch zweene Schenkel am , $a\mu$, die sich gleichfalls unendlich weit hinausziehen, in der obern Hälfte zugehören, als welche nach der Richtung $\alpha\delta$ gleichfalls so durchschnitten wird, daß $\delta\alpha\zeta < \alpha$ wird, wie für den hyperbolischen Schnitt erfordert wird, weil sonst der Schnitt entweder eine Parabel oder eine Ellipse gäbe. Die ganze Hyperbel hat demnach vier Schenkel $A\gamma$, $A\psi$, am , $a\mu$, welches sich bei der Parabel und Ellipse anders verhält, weil da offenbar die schneidende Ebene des doppelten Regels obere Hälfte nicht treffen kann.

Die grade Linie $\alpha A\alpha\delta$, in der die schneidende Ebene den doppelten Arentriangel trifft, heißt der Hyperbel Durchmesser, und das Stück von ihm $A\alpha$, das zwischen den beiden Scheiteln der Hyperbel A , α , liegt, heißt die Zwergaxe auch schlechtweg Ase.

II. Eine

II.

Eine Gleichung für die Hyperbel zu finden.

Aufl. Man stelle sich durch irgend einen Punkt in Ad 3. B. in 5. eine Ebene senkrecht durch den Arentriangel so gelegt vor, daß zugleich des Kegels Are auf ihr senkrecht ist, so erhält man wie bei der Parabel und Ellipse einen Kreis, von dem nur ein Durchmesser seyn mag; st sei die zu As gehörige senkrechte Ordinate, so ist st auch zugleich die in dem Kreis zur Abscisse ns gehörige senkrechte Ordinate, und daher

$$ns : st = st : sr;$$

Durch A ziehe man die $A\pi$ der BD und AL der pr gleichlaufend, so ist $sr = sp + AL$, oder wenn man allgemein die AL mit g bezeichnet, so ist $sr = sp + g$, also $ns : st = st : (sp + g)$ P.)

Heißt die Zwergaxe Aa, a ; so ergibt sich

$$sp : sA = rp : Aa = g : a$$

weil Ap der aL gleichlaufend ist; daraus folgt

$$sp = \frac{g \cdot sA}{a}$$

und dieses in P. gesetzt, giebt

$$ns : st = st : \left(\frac{g \cdot sA}{a} + g \right)$$

oder, weil dieses offenbar allgemein ist,

$$ns : y = y : \left(\frac{g \cdot x}{a} + g \right)$$

§ 3

also

$$\begin{aligned} \text{also} \quad y^2 &= ns. g \left(1 + \frac{x}{a} \right) \\ &= \frac{ns}{x} \cdot g \cdot \left(x + \frac{x^2}{a} \right) \quad Q.) \end{aligned}$$

wo sowohl g als $\frac{ns}{x}$ und daher auch $\frac{ns}{x} \cdot g$ eine beständige Größe ist, die wie bei der Ellipse der Parameter heißt, und auch mit b bezeichnet wird, wodurch sich dann die Gleichung

$$y^2 = b \left(x + \frac{x^2}{a} \right) \quad R.) \text{ ergibt.}$$

III.

Die Gleichung R. ist für bejahte Abscissen, die von A nach d zu genommen werden, richtig; da nun aber auch den verneinten Abscissen, die von A nach δ zu genommen werden, so bald sie größer als Aa sind, Ordinaten zugehören, wie aus der Figur klar ist, so muß man untersuchen, ob die Gleichung R auch für verneinte Abscissen gelte, und daher als eine allgemeine Gleichung für die Hyperbel angenommen werden könne. Man findet nämlich hier eben so, wie in 362. IV. für den Theil der Hyperbel $\nu A \psi$

$$\begin{aligned} b &= \frac{AB. \sin \beta. \sin \alpha}{\operatorname{Cof} \frac{1}{2} \alpha^2}; \\ &= \frac{AB. \sin BAa. \sin \alpha}{\operatorname{Cof} \frac{1}{2} \alpha^2}; \end{aligned}$$

aber

aber AB. sin BAa ist, wie die Trigon. lehrt, das Perpendikel By, also

$$b = By. \frac{\sin \alpha}{\cos \frac{1}{2} \alpha^2}$$

Auf eben die Art wird für den Theil maμ

$$b = \frac{aB. \sin ma\zeta. \sin \alpha}{\cos \frac{1}{2} \alpha^2} \\ = \frac{aB. \sin BaA. \sin \alpha}{\cos \frac{1}{2} \alpha^2};$$

wo wieder aB. sin BaA = By, also auch für diesen Theil der Hyperbel

$$b = By. \frac{\sin \alpha}{\cos \frac{1}{2} \alpha^2};$$

wie für den vorigen, oder b ist für beide Theile der Hyperbel völlig einerlei. Betrachtet man also den obern Theil der Hyperbel besonders, und nimmt die Abscissen in ihm von a aus, so gilt hier offenbar eben die Gleichung Q, die man auch für den untern fand; sollen aber alle Abscissen von A aus, die bejahten nach d zu, und die verneinten nach δ zu gerechnet werden, so muß offenbar jede verneinte Abscisse durch - (Aa + x) oder - (a + x) ausgedrückt werden, wenn die bejahten x heißen; setzt man also in (R) - (a + x) statt x, so ergiebt sich eine der Hyperbel zugehörige Gleichung für verneinte Abscissen, nämlich

§ 4

y² =

$$\begin{aligned}
 y^2 &= b. \left(-a - x + \frac{a^2 + 2ax + x^2}{a} \right) \\
 &= b. \left(-a - x + a + 2x + \frac{x^2}{a} \right) \\
 &= b. \left(x + \frac{x^2}{a} \right) \text{ völlig wie R.)}
 \end{aligned}$$

folglich ist R eine allgemeine Gleichung für die Hyperbel so wohl für bejahre als verneinte Abscissen.

IV.

Alles, was in (362 das. Anm.) von der Ellipse gesagt worden, läßt sich leicht auf die Hyperbel anwenden, wenn man nur statt des dortigen $-a$ hier $+a$ setzt, und kann daher hier übergangen werden. Uebrigens wird man mich entschuldigen, daß ich in Erklärung der drei Sätze (349. 362. 389) etwas weitläufig gewesen bin, da es überhaupt schwer ist, den ersten Anfängern von diesen dreien ungemein brauchbaren Linien nur einen vollkommen deutlichen Begriff beizubringen.