

Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

**Erläuterungen der kästnerischen Analysis endlicher
Größen**

Langsdorf, Karl Christian

Mannheim, 1776

§. 434. Man setze in der Gleichung [...]

[urn:nbn:de:bsz:31-412388](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:bsz:31-412388)

zogen wird, ist der verlangte Durchmesser. In-
dessen ist auch die Absicht des Ausdrucks

$$\text{tang } O = \frac{e}{2\zeta}$$

eigentlich nicht, zu zeigen, wie man den Durch-
messer ziehen solle, sondern nur seine Lage gegen
die Abscissenlinie durch einen allgemeinen Aus-
druck zu bestimmen, damit man sich desselben in
andern Rechnungen bedienen kann.

§. 434.

Man setze in der Gleichung $\odot$ (431.) statt
des zweiten Glieds blos Ay , statt des dritten B ,
so erhält man

$$y^2 + Ay + B = 0;$$

also 1.) $y = -\frac{1}{2}A - \sqrt{\left(\frac{1}{4}A^2 - B\right)}$

2.) $y = -\frac{1}{2}A + \sqrt{\left(\frac{1}{4}A^2 - B\right)}$

und das Produkt aus diesen beiden Werthen

$$= \frac{1}{4}A^2 + \sqrt{\left(\frac{1}{4}A^2 - B\right)} \cdot \frac{1}{2}A - \sqrt{\left(\frac{1}{4}A^2 - B\right)}.$$

$$\frac{1}{2}A - \frac{1}{4}A^2 + B = B = \frac{\delta x^2 + \beta x + \alpha}{\zeta};$$

Folglich ist in $(\odot)$ $\frac{\delta x^2 + \beta x + \alpha}{\zeta}$ dem Pro-

dukt aus beiden Werthen von y gleich. Diese
Werthe sind aber hier entweder beide $= IK$, oder

beide $= GH$, folglich enthält $\frac{\delta x^2 + \beta x + \alpha}{\zeta}$ zwei

κ 4 Werthe

Werthe, sowohl den für IK^2 , als den für GH^2 ;
 da nun überdas $-\left(\frac{\varepsilon x + \gamma}{2\zeta}\right)$ ein Ausdruck so-
 wohl für IK als für GH ist (431.), so ist auch
 $\left(\frac{\varepsilon x + \gamma}{2\zeta}\right)^2$ ein Ausdruck, der zwei Werthe so-
 wohl den für IK^2 , als den für GH^2 enthält; und
 man hat daher

$$\frac{\varepsilon^2 x^2 + 2\varepsilon x \gamma + \gamma^2}{4\zeta^2} = \frac{\delta x^2 + \beta x + \alpha}{\zeta}$$

mithin

$$\varepsilon^2 x^2 + 2\varepsilon x \gamma + \gamma^2 = (\delta x^2 + \beta x + \alpha) \cdot 4\zeta$$

und

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 x^2 &= (\delta x^2 + \beta x + \alpha) \cdot 4\zeta - 2\varepsilon x \gamma - \gamma^2; \\ &= 4\delta \zeta x^2 + 4\beta \zeta x + 4\alpha \zeta - 2\varepsilon x \gamma - \gamma^2; \end{aligned}$$

folglich

$$(\varepsilon^2 - 4\delta \zeta) x^2 = (4\beta \zeta - 2\varepsilon \gamma) \cdot x + 4\alpha \zeta - \gamma^2;$$

Dieß giebt in 184. $a = \varepsilon^2 - 4\delta \zeta$, $2\varepsilon \gamma - 4\beta \zeta = b$,
 und $\gamma^2 - 4\alpha \zeta = c$ gesetzt

$$\begin{aligned} x &= \frac{[4\beta \zeta - 2\varepsilon \gamma \pm \sqrt{(4\beta \zeta - 2\varepsilon \gamma)^2 + 4 \cdot (4\alpha \zeta - \gamma^2) \cdot (\varepsilon^2 - 4\delta \zeta)}] : 2(\varepsilon^2 - 4\delta \zeta)}{\varepsilon^2 - 4\delta \zeta} \\ &= \frac{2\beta \zeta - \varepsilon \gamma \pm \sqrt{(2\beta \zeta - \varepsilon \gamma)^2 + (4\alpha \zeta - \gamma^2) \cdot (\varepsilon^2 - 4\delta \zeta)}}{\varepsilon^2 - 4\delta \zeta} \end{aligned}$$

Also

$$1.) x = \frac{2\beta \zeta - \varepsilon \gamma + \sqrt{(2\beta \zeta - \varepsilon \gamma)^2 + (4\alpha \zeta - \gamma^2) \cdot (\varepsilon^2 - 4\delta \zeta)}}{\varepsilon^2 - 4\delta \zeta}$$

$$2.) x = \frac{2\beta \zeta - \varepsilon \gamma - \sqrt{(2\beta \zeta - \varepsilon \gamma)^2 + (4\alpha \zeta - \gamma^2) \cdot (\varepsilon^2 - 4\delta \zeta)}}{\varepsilon^2 - 4\delta \zeta}$$

Der

Der erste von diesen beiden Werthen ist die zu derjenigen Ordinate, deren beide Werthe GH sind; und der letzte die zu derjenigen Ordinate, deren beide Werthe IK sind, gehörige Abscisse. Nun ist aber $KH = AH - AK$, also $KH = [2\beta\zeta - \varepsilon\gamma + r((2\beta\zeta - \varepsilon\gamma)^2 + (4\alpha\zeta - \gamma^2) \cdot (\varepsilon^2 - 4\delta\zeta)) - (2\beta\zeta - \varepsilon\gamma - r((2\beta\zeta - \varepsilon\gamma)^2 + (4\alpha\zeta - \gamma^2) \cdot (\varepsilon^2 - 4\delta\zeta)))] : (\varepsilon^2 - 4\delta\zeta) = \frac{2r((2\beta\zeta - \varepsilon\gamma)^2 + (4\alpha\zeta - \gamma^2) \cdot (\varepsilon^2 - 4\delta\zeta))}{\varepsilon^2 - 4\delta\zeta}$

Zieht man nun aus G mit KH eine Parallellinie durch IK, so wird IK in zwei Theile getheilt, wovon der untere = GH, der obere = IK - GH ist. Weil nun die aus G bis an IK gezogene grade Linie = KH ist, so hat man ein rechtwinkliges Dreieck, davon der eine Cathet = IK - GH, der andere = KH ist, und es ist $IG^2 = KH^2 + (IK - GH)^2$; aber vermöge 431. ist $IK = (\varepsilon \cdot AK + \gamma) : 2\zeta$ und $GH = - \frac{(\varepsilon \cdot AH + \gamma)}{2\zeta}$

Demnach $IK - GH = \frac{\varepsilon \cdot AH + \gamma}{2\zeta} - \left(\frac{\varepsilon \cdot AK + \gamma}{2\zeta} \right) = \frac{\varepsilon \cdot (AH - AK)}{2\zeta} = \frac{\varepsilon \cdot KH}{2\zeta}$, und $IG^2 = KH^2 + (IK - GH)^2 = KH^2 + \frac{\varepsilon^2 \cdot KH^2}{4\zeta^2} = \frac{\varepsilon^2 + 4\zeta^2}{4\zeta^2} \cdot KH^2$, folglich hat man für die Länge des Durchmesser

$$\begin{aligned} \text{messers IG} &= r \left(\frac{\varepsilon^2 + 4\zeta^2}{4\zeta^2} \cdot KH^2 \right) = KH \cdot \frac{r(\varepsilon^2 - 4\zeta^2)}{2\zeta} \\ &= \frac{2r((2\beta\zeta - \varepsilon\gamma)^2 - (\varepsilon^2 - 4\delta\zeta) \cdot (\gamma^2 - 4\alpha\zeta))}{\varepsilon^2 - 4\delta\zeta} \\ &= \frac{r(\varepsilon^2 + 4\zeta^2)}{2\zeta}. \end{aligned}$$

Ist also $(\varepsilon^2 - 4\delta\zeta) \cdot (\gamma^2 - 4\alpha\zeta)$
 $> (2\beta\zeta - \varepsilon\gamma)^2$, so ist die GröÙe unter dem
 Wurzelzeichen des ersten Factors verneint, also
 die Wurzel daraus und daher KH unmöglich.
 Da nun $(2\beta\zeta - \varepsilon\gamma)^2 = 4\beta^2\zeta^2 + \varepsilon^2\gamma^2 - 4\beta\varepsilon\zeta\gamma$,
 und $(\varepsilon^2 - 4\delta\zeta) \cdot (\gamma^2 - 4\alpha\zeta) = \varepsilon^2\gamma^2 - 4\delta\zeta\gamma^2 -$
 $4\alpha\varepsilon^2\zeta + 16\alpha\delta\zeta^2$, so darf $4\beta^2\zeta^2 - 4\beta\varepsilon\zeta\gamma$
 nicht $< 16\alpha\delta\zeta^2 - 4\delta\gamma^2\zeta - 4\alpha\varepsilon^2\zeta$, oder $\beta^2\zeta^2 -$
 $\beta\varepsilon\zeta\gamma$ nicht $< 4\alpha\delta\zeta^2 - \delta\gamma^2\zeta - \alpha\varepsilon^2\zeta$ seyn, wenn
 KH möglich seyn soll. Es ist also KH unmög-
 lich, wenn

$$\beta^2 - \frac{\beta\varepsilon\gamma}{\zeta} < 4\alpha\delta - \left(\frac{\delta\gamma^2 + \alpha\varepsilon^2}{\zeta} \right)$$

aber wenn KH unmöglich ist, so ist es auch IG;
 d. i. IG giebt in diesem Fall für die Linie der
 zweiten Ordnung keinen solchen Durchmesser ab,
 der sie irgendwo schneidet. Es giebt aber auch
 Fälle, da sie nur in einem Punkt die Linie von
 der zweiten Ordnung schneidet, und von da zwi-
 schen den Schenkeln der krummen Linie unend-
 lich fortgeht, ohne ihr irgendwo zum zweitenmal
 zu begegnen; dieß ist der Fall, da $\varepsilon^2 = 4\delta\zeta$.
 Setzt man nämlich $\varepsilon^2 = 4\delta\zeta$, so ist

x =

$$x = \frac{2\beta\zeta - \varepsilon\gamma \pm r((2\beta\zeta - \varepsilon\gamma)^2 + (4\alpha\zeta - \gamma^2) \cdot 0)}{0}$$

$$= \frac{2\beta\zeta - \varepsilon\gamma \pm r(2\beta\zeta - \varepsilon\gamma)^2}{0}, \text{ also}$$

$$1.) x = \frac{2\beta\zeta - \varepsilon\gamma + r(2\beta\zeta - \varepsilon\gamma)^2}{0}$$

$$= \frac{2\beta\zeta - \varepsilon\gamma + 2\beta\zeta - \varepsilon\gamma}{0}$$

$$= \frac{2 \cdot (2\beta\zeta - \varepsilon\gamma)}{0}$$

$$= \infty$$

$$2.) x = \frac{2\beta\zeta - \varepsilon\gamma - r(2\beta\zeta - \varepsilon\gamma)^2}{0}$$

$$= \frac{2\beta\zeta - \varepsilon\gamma - 2\beta\zeta + \varepsilon\gamma}{0}$$

$$= \frac{0}{0} = 0 (*)$$

folglich ist für $\varepsilon^2 = 4\beta\zeta$, $AH = \infty$, und $AK = 0$, mithin $KH = AH - AK = \infty$, wie auch die

(*) An sich ist $\frac{0}{0}$ ein unbestimmter Ausdruck, er könnte = 1, = 2, = 3 u. s. f. seyn, weil $0 = 0$
 $= 2 \cdot 0 = 3 \cdot 0$ u. s. f. ist. Hier ist aber offenbar $\frac{0}{0} = 0$; S. hiervon Karstens Beitr. zur Aufnahme der Mathem. p. 35. sqq.

die Gleichung für KH unmittelbar giebt. Aber für $KH = \infty$ ist auch $IG = \infty$, daß also der Punkt G unendlich weit von I absteht, und es giebt also hier dem Scheine nach nur einen Durchschnittspunkt I. Der andere ist nämlich nicht unmöglich; er ist nur unendlich weit entfernt. Wendet man nun diese Betrachtung nach 421. auf die verschiedenen Arten der Kegelschnitte an, so ergiebt sich folgendes.

Für die Parabel ist $\alpha = \gamma = \delta = \varepsilon = 0$; $\zeta = 1$, und $\beta = -a$, also $\beta^2 = a^2$, und $4\alpha\delta - \left(\frac{\delta\gamma^2 - \alpha\varepsilon^2}{\zeta}\right) = \frac{4 \cdot 0 - 0 + 0}{1} = 0$, folglich ist

$$\beta^2 - \frac{\varepsilon\gamma}{\zeta} \cdot \beta > 4\alpha\delta - \left(\frac{\delta\gamma^2 + \alpha\varepsilon^2}{\zeta}\right)$$

daß also für die Parabel Durchmesser möglich sind, die sie wenigstens in einem Punkt durchschneiden. Es ist aber ferner bei ihr $\varepsilon^2 = 4\delta\zeta$, oder $\varepsilon^2 - 4\delta\zeta = 0$, weil $\varepsilon = 0$, $\delta = 0$, und $\zeta = 1$, folglich ist die Ase der Parabel unendlich groß, und die Parabel wird nur einmal von ihr geschnitten. In der Hyperbel ist $\alpha = \gamma = \varepsilon = 0$,

$\zeta = 1$, $\beta = b$, $\delta = \frac{b}{a}$, folglich

$$4\alpha\delta - \left(\frac{\delta\gamma^2 + \alpha\varepsilon^2}{\zeta}\right) = 4 \cdot 0 \cdot \frac{b}{a} - \left(\frac{\frac{b}{a} \cdot 0 + 0}{1}\right) = 0;$$

Demnach

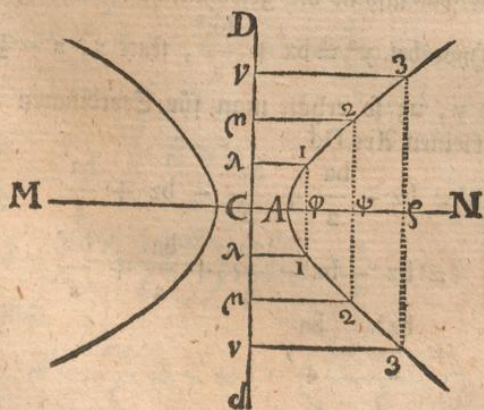
Demnach $\beta^2 - \frac{\varepsilon\gamma}{\zeta} \beta > 4\alpha d - \left(\frac{d\gamma^2 + \alpha\varepsilon^2}{\zeta} \right)$

also ist es nicht unmöglich, der Hyperbel einen Durchmesser zu ziehen, der sie wenigstens in einem Punkt schneidet. Daß sie aber in zweien Punkten von ihm in der That geschnitten wird, folge daraus, weil ε^2 nicht $= 4d\zeta$ seyn kann, denn es ist $\varepsilon^2 = 0$, und $4d\zeta = 4\frac{b}{a}$, also $4d\zeta > \varepsilon^2$, wie auch

die Figur der Hyperbel ausweist.

Den Fall noch zu erläutern, da der Durchmesser einer Linie der zweiten Ordnung in gar keinem Punkt begegnet, will ich noch folgende Aufgabe vorausschicken.

Eine Gleichung für die Hyperbel zwischen Coordinaten auf der kleinen Ase Dd zu finden.



Aufg.

Auß. $\Delta\phi, \phi_1; \Delta\psi, \psi_2; \Delta\varrho, \varrho_3$ u. s. w.
 seien Coordinaten auf dem Durchmesser MN;
 ferner sei $C\lambda = \phi_1, C\mu = \psi_2, C\nu = \varrho_3$ u. s. f.
 und daher $C\phi = \lambda_1, C\psi = \mu_2, C\varrho = \nu_3$ u. s. f.
 so ist, wenn die Coordinaten auf MN wie ge-
 wöhnlich x, y , heißen,

$$C\lambda = \phi_1 = y;$$

$$C\mu = \psi_2 = y; \text{ u. s. f.}$$

oder, wenn die Abscissen auf Dd von C ausge-
 nommen, u heißen, so ist allgemein

$$u = y;$$

eben so $\lambda_1 = C\phi;$

$$\mu_2 = C\psi; \text{ u. s. f.}$$

also, wenn die Ordinaten, welche zu Abscissen
 auf Dd gehören, z heißen, so ist überhaupt

$$z = CA + x = \frac{1}{2}a + x$$

Man setze also in die gewöhnliche Gleichung für
 die Hyperbel $y^2 = bx + \frac{bx^2}{a}$, statt $x, z - \frac{1}{2}a$;

statt y, u ; so erhält man für Coordinaten auf
 der kleinen Are Dd

$$\begin{aligned} u^2 &= bz - \frac{ba}{2} + \frac{bz^2}{a} - bz + \frac{ba}{4} \\ &= bz - bz - \frac{2ba}{4} + \frac{ba}{4} + \frac{bz^2}{a} \\ &= \frac{bz^2}{a} - \frac{ba}{4}; \end{aligned}$$

also

$$\text{also } z^2 = \left(\frac{u^2 + \frac{ba}{4}}{b} \right) \cdot a \\ = \frac{a}{b} u^2 + \frac{1}{4} a^2$$

Will man demnach auch auf der kleinen Ase Abscissen und Ordinaten mit x, y , bezeichnen, weil man überhaupt Coordinaten so zu benennen gewohnt ist, so ist die gesuchte Gleichung

$$y^2 = \frac{1}{4} a^2 + \frac{ax^2}{b} \quad Q.)$$

$$\text{und } \frac{1}{4} a^2 * * + \frac{a}{b} x^2 * - y^2 = 0;$$

Diese Gleichung nun, worin ich die nach (419.) fehlende Glieder der Bequemlichkeit wegen mit (*) bemerkt habe, giebt, mit 419. verglichen,

$$\alpha = \frac{1}{4} a^2, \beta = 0, \gamma = 0, \delta = \frac{a}{b}, \varepsilon = 0, \text{ und}$$

$$\zeta = -1;$$

$$\text{also } \beta^2 - \frac{\varepsilon\gamma}{\zeta} \cdot \beta = 0;$$

und

$$4\alpha\delta - \left(\frac{\delta\gamma^2 + \alpha\varepsilon^2}{\zeta} \right) = 4 \cdot \frac{1}{4} a^2 \cdot \frac{a}{b} - 0 = \frac{a^3}{b};$$

folglich

$$\beta^2 - \frac{\varepsilon\gamma}{\zeta} \cdot \beta < 4\alpha\delta - \left(\frac{\delta\gamma^2 + \alpha\varepsilon^2}{\zeta} \right)$$

mithin

mithin ist Q eine Gleichung für die Hyperbel zwischen Coordinaten auf einem solchen Durchmesser, der die krumme Linie nirgends trift; und daß sich dieses mit der kleinen Aye so verhalte, daß sie nämlich, so weit sie auch verlängert wird, den Schenkeln der Hyperbel doch nirgends begegnet, ist auch schon aus andern Gründen bekannt. (394; 398.) In der Ellipse ist alles, wie in der Hyperbel, nur $+a$ und $-a$ mit einander verwechselt.

§. 437.

Die Gleichung 436. giebt

$$u + \frac{(\mu\epsilon + 2v\delta) \cdot t + \mu\gamma + v\beta}{2(\mu^2\zeta + \mu\nu\epsilon + v^2\delta)} \pm r \left[\frac{(\mu\epsilon + 2v\delta) \cdot t + \mu\gamma + v\beta}{2(\mu^2\zeta + \mu\nu\epsilon + v^2\delta)} \pm r \right]$$

$$+ \frac{(\mu^2\zeta + \mu\nu\epsilon + v^2\delta)^2 - (\delta t^2 + \beta t + \alpha)}{4(\mu^2\zeta + \mu\nu\epsilon + v^2\delta)^2}$$
 wo also zu eben der Abseisse t zweene Werthe von u oder zwei Ordinaten gehören, nämlich die pM für $-r$ und pn für $+r$; da nun des zweiten Glieds Coefficient der Summe der Wurzeln mit entgegengesetzten Zeichen gleich ist, so hat man

$$pn + pM = 2pl = - \frac{(\mu\epsilon + 2v\delta) \cdot t + \mu\gamma + v\beta}{\mu^2\zeta + \mu\nu\epsilon + v^2\delta}$$

folglich

$$pl = - \left(\frac{(\mu\epsilon + 2v\delta) \cdot t + \mu\gamma + v\beta}{2(\mu^2\zeta + \mu\nu\epsilon + v^2\delta)} \right) = \omega(Q.)$$

Es