

Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

Erläuterungen der kästnerischen Analysis endlicher Größen

Langsdorf, Karl Christian

Mannheim, 1776

§. 496. Um n unbekannte Größen zu bestimmen, sind zwar n Gleichungen hinreichend, aber doch mit der Einschränkung, daß sie alle von einander [...]

[urn:nbn:de:bsz:31-412388](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:bsz:31-412388)

$$\text{und } n = \frac{-\frac{3}{2} + \sqrt{(2m + \frac{3}{4})}}{-3 + \sqrt{(8m + 9)}}$$

Er. Zu finden, von der wievielten Ordnung die Linie ist, deren Gestalt durch 9. Punkte bestimmt ist, setze man $m = 9$, dieß giebt

$$n = \frac{-3 + \sqrt{(72 + 9)}}{2} = \frac{-3 + 9}{2} = 3$$

oder die Linie, deren Gestalt durch 9. Punkte bestimmt wird, ist eine von der dritten Ordnung.

Auch ist aus dem Werth von n , der allemal eine ganze Zahl sein muß, klar, daß keiner krummen Linie ihre Gestalt durch eine andere Anzahl von Punkten bestimmt ist, als für die $8m + 9$ eine Quadratzahl ist.

§. 496. *

Um n unbekannte Größen zu bestimmen, sind zwar n Gleichungen hinreichend, aber doch mit der Einschränkung, daß sie alle von einander verschieden sein müssen, und keine die andere schon in sich faßt, weil in dem Fall, wo $m + 1$ Gleichungen völlig mit einander überein kämen, $n - m$ Größen unbestimmt blieben.

Die Anzahl von $\frac{(n + 3) \cdot n}{2}$ Punkten, wodurch die krumme Linie der n ten Ordnung bestimmt

$N 3$

stimmt wird, oder die Verhältniß der $\frac{(n+3) \cdot n}{2}$
 + 1 Coefficienten gegen einander soll aus den
 $\frac{(n+3) \cdot n}{2}$ Gleichungen bestimmt werden. Giebt
 es also unter diesen Gleichungen einige, die schon
 unter einer der übrigen begriffen sind, so reichen
 $\frac{(n+3) \cdot n}{2}$ Punkte zu Bestimmung der Linie
 nicht zu.

Die Möglichkeit eines solchen Falls zu bewei-
 sen, betrachte man die Linien der zweiten Ord-
 nung, die durch folgende allgemeine Gleichung
 $ax^2 + \beta xy + \gamma y^2 + dx + ey + \zeta = 0;$
 bestimmt werden. Es seien fünf Punkte gege-
 ben, durch die man eine Linie von dieser Ord-
 nung beschreiben soll. Durch zween solcher Punk-
 te ziehe man die Axc, und von einem dieser bei-
 den ziehe man nach einem dritten, unter was für
 einem Winkel es auch sei, eine Ordinate. Es
 sei aber

$$x = 0; a; 0; c; e;$$

$$y = 0; 0; b; d; f;$$

so ergeben sich daraus folgende fünf Gleichungen:

$$1.) \zeta = 0;$$

$$2.) aa^2 + da + \zeta = 0$$

$$3.) \gamma b^2 + eb + \zeta = 0$$

$$4.) \alpha c^2 + \beta cd + \gamma d^2 + dc + ed + \zeta = 0;$$

$$5.) \alpha e^2 + \beta ef + \gamma f^2 + de + ef + \zeta = 0;$$

Aus

Aus 1, 2 und 3 erhält man $\xi = 0$; $\delta = -\alpha a$;
 $e = -\gamma b$, und daher, wenn man diese Werthe in
 4. und 5. substituirt,

$$\alpha c^2 + \beta c d + \gamma d^2 - \alpha a c - \gamma b d = 0;$$

$$\alpha e^2 + \beta e f + \gamma f^2 - \alpha a e - \gamma b f = 0;$$

oder

$$\beta = \frac{\alpha c (a - c) + \gamma d (b - d)}{cd}$$

$$= \frac{\alpha e (a - e) + \gamma f (b - f)}{ef}$$

Diese beide Werthe werden zu einem einzigen
 Ausdruck, wenn

$$\frac{a - c}{d} = \frac{a - e}{f};$$

und $\frac{b - d}{c} = \frac{b - f}{e};$

oder wenn $a = \frac{cf - de}{f - d};$

und $b = \frac{de - cf}{e - c}$

Es erhellet also, daß fünf gegebene Punkte
 eine solche Lage gegen einander haben können, daß
 die Linie der zwoten Ordnung unbestimmt bleibt.
 Offenbar findet dieses statt, wenn vier von den
 gegebenen Punkten sich in einer graden Linie be-
 finden. Aus dem vorhergehenden ist $f =$
 $\frac{d(a - e)}{a - c} = b - \frac{e(b - d)}{c}$ und $(c - e)(ad$

$- ab + bc) = 0$. Wenn nun $e = c$, so wird auch $f = d$, und es fallen zweeine Punkte zusammen. Es sei also $ad - ab + bc = 0$, oder $d = b - \frac{bc}{a}$, so findet man $f = b - \frac{be}{c}$, und es liegen demnach vier Punkte in einer graden Linie.

Eben so würde der Aufgabe durch eine grade Linie ein Genügen geschehen, in der fünf gegebene Punkte lägen.

Auf eben diese Art kann eine Gleichung für Linien der dritten Ordnung entweder drei grade Linien, oder eine grade, die mit einem Kegelschnitt verbunden ist, in sich fassen. Also können auch neun Punkte gegeben sein, durch die sich unendlich viele Linien von dieser Ordnung ziehen lassen, welches alles von Linien einer jeden Ordnung, wie im angeführten Exempel, leicht zu begreifen ist.

Schneiden also zwei Linien der dritten Ordnung einander in neun Punkten, so müssen diese neun Punkte eine solche Lage gegen einander haben, daß sie zu Bestimmung einer Linie der dritten Ordnung nicht hinreichend sind, d. i. daß in der allgemeinen Gleichung, wenn man sie auf diese Punkte anwendet, allemal ein Coefficient unbestimmt bleibt.