

Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

Erläuterungen der kästnerischen Analysis endlicher Größen

Langsdorf, Karl Christian

Mannheim, 1776

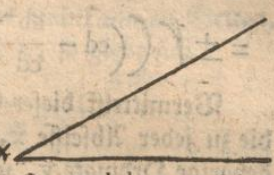
§. 499. Es ist von einem Dreieck eine Seite nebst dem gegenüberstehenden Winkel und die Summe der beiden übrigen Seiten gegeben [...]

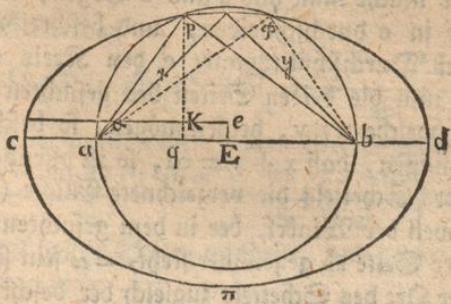
[urn:nbn:de:bsz:31-412388](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:bsz:31-412388)

S. 499.

Es ist von einem Dreieck eine Seite nebst dem gegenüberstehenden Winkel und die Summe der beiden übrigen Seiten gegeben; man soll den Ort des dritten Scheitels finden.

Ausl. ab a ————— b
 sei die ge-
 gebene c ————— d

Seite, α der gegenüberstehende Winkel, und cd die Summe der beiden andern Seiten, so ver-
 fahre man so. Auf α 
 cd trage man die ab so, daß $ac = bd$, und setze a und b als Brennpunkte einer Ellipse an. Die kleine Ase der Ellipse, deren Brennpunkte a, b , und große Ase cd ist, heiße β , so ist $\beta^2 = cd^2 - ba^2$ (376).



N 5

Dar.

Daraus giebt sich der Parameter

$$b = \frac{cd^2 - ba^2}{cd}$$

$$= cd - \frac{ab^2}{cd} \quad (366)$$

und nach (364)

$$y = \pm \sqrt{\left(\left(cd - \frac{ab^2}{cd} \right) x - \left(cd - \frac{ab^2}{cd} \right) x^2 : cd \right)}$$

$$= \pm \sqrt{\left(\left(cd - \frac{ab^2}{cd} \right) x + \left(\frac{ab^2}{cd^2} - 1 \right) x^2 \right)};$$

Vermittelt dieser Gleichung suche man nun die zu jeder Abscisse x , die man auf cd nimmt, gehörige Ordinate y , und verzeichne solchergestalt die Ellipse $cp\phi d\pi c$. Aus 153. Anm. suche man des zu ab und α gehörigen Kreises Halbmesser, der sich $= \frac{ab}{2 \sin \alpha}$ ergibt; mit diesem Halb-

messer mache man aus a und b Bogen, die einander in e durchschneiden, und beschreibe aus diesem Durchschnittspunkt e den Kreis $ap\phi b$. Weil nun die beiden Seiten des gesuchten Dreiecks, welche x , y , heißen mögen, so beschaffen sein müssen, daß $x + y = cd$, so ist offenbar der Ort des Scheitels die verzeichnete Ellipse (475.) und weil der Winkel, der in dem gesuchten Dreieck der Seite ab gegenüber steht, $= \alpha$ sein soll, so ist der Ort des Scheitels zugleich der beschriebene Kreis

Kreis (153. Anm.), folglich liegt der gesuchte Scheitel p oder ϕ zugleich in der Ellipse und dem Kreise, oder da, wo beide einander schneiden, daß es also für den gesuchten Punkt zweene verschiedene Stellen giebt, die aber in besondern Fällen, wie leicht zu begreifen ist, zusammenfallen können. Die trigonometrische Berechnung wäre folgende.

Es sei die gegebene Summe der beiden Seiten = m, und die von den unbekannten Seiten, welche durch a geht, heiße x, so giebt sich

$$\text{Cot } a = \frac{x}{(m-x) \cdot \sin \alpha} - \text{Cot } \alpha$$

und

$$\sin a = \frac{(m-x) \cdot \sin \alpha}{ab}$$

also

$$1.) \text{Cof } a = \text{Cot. } a \cdot \sin a = \frac{x}{ab} + \left(\frac{x-m}{ab} \right) \cdot \text{Cof } \alpha$$

nun ist überdas

$$2.) \text{Cof } a = r(1 - \sin^2 a) = r \left(\frac{ab^2 - (m-x)^2 \sin^2 \alpha}{ab^2} \right)$$

folglich, wenn man diese beiden Werthe gleich setzt,

$$r \left(\frac{ab^2 - (m-x)^2 \sin^2 \alpha}{ab^2} \right) = \frac{x}{ab} + \left(\frac{x-m}{ab} \right) \cdot \text{Cof } \alpha$$

und auf beiden Seiten quadriert, und gehörig substituirt, giebt

$$2. (1 + \text{Cof } \alpha) x^2 - 2m(1 + \text{Cof } \alpha) x = ab^2 - m^2;$$

oder

$$\text{oder } x^2 - mx = \frac{ab^2 - m^2}{2(1 - \cos \alpha)}$$

mithin

$$x = \frac{1}{2} m \pm r \left(\frac{ab^2 - m^2}{2(1 - \cos \alpha)} + \frac{1}{4} m^2 \right)$$

also hat man einen zweifachen Werth für x , wie der Verzeichnung gemäß ist, da x sowohl ap , als $a\phi$ sein kann.

§. 504.

Für jeden Durchschnitt, den der Kreis mit der Parabel macht, ist

$$y^4 + a^2 y^2 - 2a^2 cy + a^2 \left[\begin{array}{l} b^2 \\ + c^2 \\ - r^2 \end{array} \right] = 0; \quad (503)$$

Fällt nun M in A , so erhält man statt GM die Linie GA . Nun ist aber $GA^2 = GE^2 + AE^2 = c^2 + b^2$; folglich ist für diesen Durchschnitt in A , $r^2 = c^2 + b^2$; diesen Werth in die vorige Gleichung gesetzt, giebt

$$y^4 + a^2 y^2 - 2a^2 cy = 0;$$

folglich bleibt noch

$$y^3 + a^2 y - 2a^2 c = 0;$$

Und wenn man G in AE nimmt, so wird noch eine Wurzel der Gleichung $(P.) = 0$, und die übrigen beiden sind in dieser Gleichung enthalten

$$y^2 +$$