

Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

Erläuterungen der kästnerischen Analysis endlicher Größen

Langsdorf, Karl Christian

Mannheim, 1776

§. 507. II. Die Durchschnitt eines gegebenen Kreises mit einer gegebenen
Ellipse zu finden, verfähre man so [...]

[urn:nbn:de:bsz:31-412388](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:bsz:31-412388)

§. 507. II.

Die Durchschnitte eines gegebenen Kreises mit einer gegebenen Ellipse zu finden, verfähre man so.

Die Ase der Ellipse sei $ed = a$, der Parameter $= b$; des Kreises Mittelpunkt sei e , sein Halbmesser $ep = r$, $eE = c$, $cE = f$, so ist

fig. 5. 499.
das. Anm.

$$\begin{aligned} r^2 &= pk^2 + ke^2 \\ &= (qp - qk)^2 + (cE - cq)^2 \\ &= (y - c)^2 + (f - x)^2 \\ &= y^2 - 2cy + c^2 + f^2 - 2fx + x^2; \end{aligned}$$

aber $x = \frac{a \pm r((a^2 - 4ay) : b)}{2}$

und $x^2 = \frac{a^2 \pm 2a r((a^2 - 4ay) : b) + (a^2 - 4ay) : b}{4}$

Also

$$\begin{aligned} r^2 &= y^2 - 2cy + c^2 + f^2 - af \mp f r \left(\frac{a^2 - 4ay}{b} \right) - \\ &\quad \frac{a}{b} y + \frac{a^2}{4b} + \frac{1}{4} a^2 \pm \frac{1}{2} a r \left(\frac{a^2 - 4ay}{b} \right) \\ &= y^2 - 2c. y + c^2 \pm \left(\frac{1}{2} a - f \right). r \left(\frac{a^2 - 4ay}{b} \right) \\ &\quad - \frac{a}{b} + f^2 \\ &\quad + \frac{1}{4} a^2 \\ &\quad + \frac{a^2}{4b} \\ &\quad - af \end{aligned}$$

Und

Und alles gehörig quadriert, giebt

$$y^4 - \left(4c + \frac{2a}{b}\right) y^3 + \left(\left(2c + \frac{a}{b}\right)^2 + 2(c^2 + f^2 + \frac{1}{4}a^2 + \frac{a^2}{4b} - r^2 - af)\right) y^2 + \left(4c + \frac{2a}{b}\right) \cdot \left(r^2 + af - c^2 - f^2 - \frac{1}{4}a^2 - \frac{a^2}{4b}\right) y + \left(r^2 + af - c^2 - f^2 - \frac{1}{4}a^2 - \frac{a^2}{4b}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}a - f\right) \cdot \frac{a^2 - 4ay}{b} = \frac{a^3}{2b} - \frac{2a^2}{b} y - \frac{a^2 f}{b} + \frac{4af}{b} y,$$

also

$$y^4 - \left(4c + \frac{2a}{b}\right) y^3 + \left(\left(2c + \frac{a}{b}\right)^2 + 2(c^2 + f^2 + \frac{1}{4}a^2 + \frac{a^2}{4b} - r^2 - af)\right) y^2 + \left(\frac{2a^2 - 4af}{b} + \left(4c + \frac{2a}{b}\right) \cdot \left(r^2 + af - c^2 - f^2 - \frac{1}{4}a^2 - \frac{a^2}{4b}\right)\right) y + \left(r^2 + af - c^2 - f^2 - \frac{1}{4}a^2 - \frac{a^2}{4b}\right)^2 + \frac{2a^2 f - a^3}{2b} = 0 \quad (Z)$$

Hiermit könnte man nun eben so, wie mit der Gleichung P. (503.) verfahren.

Die

Die Gleichung Z löst zugleich die Aufgabe auf: aus der gegebenen Grundlinie eines Dreiecks γ , dem gegenüberstehenden Winkel α , und der Summe der beiden andern Seiten m , die Höhe y zu finden, weil y die senkrechte Ordinate aus den Durchschnittspunkten auf die Arc δ . B. pq vorstellt, und alle Coefficienten gegeben sind. Es ist nämlich aus (499. das. Ann.)

$$1.) \text{ cd oder } a = m$$

$$2.) b = m - \frac{\gamma^2}{m}$$

$$3.) r = \frac{\gamma}{2 \sin \alpha}$$

und weil $\angle aeb = 2\alpha$, also $aeE = \alpha$, so ist $\sin eaE = \text{Cof } \alpha$, folglich $1 : ae = \text{Cof } \alpha : Ee$

$$\text{und } Ee = ae \cdot \text{Cof } \alpha = \frac{\gamma \cdot \text{Cof } \alpha}{2 \sin \alpha}, \text{ oder}$$

$$4.) c = \frac{1}{2} \gamma \cdot \text{Cot } \alpha;$$

Weil nun eE auf ab senkrecht ist, so ist $aE = Eb$; nun ist aber auch $ac = bd$, folglich $cE = Ed$, und daher

$$5.) f = \frac{1}{2} m$$

Man kann aber vermittlest trigonometrischer Formeln diese Aufgabe leichter auflösen, daß also die Gleichung Z, wie sie überhaupt wenig Nutzen hat (III.), auch zu diesem Gebrauch völlig entbehrlich ist.