

Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

Erläuterungen der kästnerischen Analysis endlicher Größen

Langsdorf, Karl Christian

Mannheim, 1776

§.625. Um das Quadrat von so vielen Gliedern, als man will, zu berechnen,
kann man nach und nach einzelne Glieder quadrieren [...]

[urn:nbn:de:bsz:31-412388](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:bsz:31-412388)

d. i. es wäre eine Spirallinie, welche bei Vollen-
dung $10.$ und die Spirallinie geht da durch den
Kreis, wo $x = mp$ ist; es wird nämlich in dem
Fall $y = r$, und die Gleichung $rx = mpy$ ver-
wandelt sich in $x = mp$.

§. 610.

Die Verhältniß jeder Fläche einer halben
Radlinie EAF zu dem halben beschreibenden Kreis
FLE läßt sich in völliger Schärfe angeben; sie ist
nämlich, wie in der Anal. des Unendl. gewiesen
wird, genau wie 3 : 1.

§. 625.

Um das Quadrat von so vielen Gliedern, als
man will, zu berechnen, kann man nach und
nach einzelne Glieder quadriren, und die so qua-
drierten Glieder allemal aufs neue als den ersten
Theil der Wurzel und das zunächst folgende Glied
als den zweieten ansehen. Auf diese Art er-
giebt sich

$$1 + x = (1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \dots)^2$$

wo man zuerst $(1 + Ax)^2 = 1 + 2Ax + A^2x^2$
sucht; daraus giebt sich ferner

$$(1 + Ax + Bx^2)^2 = (1 + Ax)^2 + B^2x^4 + 2Bx^2 \cdot (1 + Ax)$$

$$= 1 + 2Ax + A^2x^2 + 2ABx^3 + B^2x^4 + 2B$$

und

und hieraus findet man

$$\begin{aligned}(1 + Ax + Bx^2 + Cx^3)^2 &= (1 + Ax + Bx^2)^2 + \\ &\quad C^2x^6 + 2Cx^3(1 + Ax + Bx^2) \\ &= 1 + 2Ax + A^2x^2 + 2ABx^3 + B^2x^4 + 2BCx^5 + C^2x^6 \\ &\quad + 2B + 2C + 2AC\end{aligned}$$

So läßt sich die Reihe, so weit man will, fortsetzen, und also $\sqrt{1+x}$ so genau, als es verlangt wird, berechnen. Allgemeine Regeln, wie sich die folgenden Glieder aus den vorhergehenden berechnen lassen, findet man in der Anal. des Unendl. S. 41. Die wirkliche Berechnung giebt nun

$$\sqrt{1+x} = 1 + 0,5x - 0,0125x^2 + 0,0625x^3 \dots Q.)$$

Da sowohl für $+x$ als $-x$, alle grade Potenzen ebendieselben sind, so ist klar, daß für $\sqrt{1-x}$ das erste, dritte, fünfte und überhaupt alle ungrade Glieder ungeändert bleiben; die graden aber werden verneint. Also ist

$$\sqrt{1-x} = 1 - 0,5x - 0,0125x^2 - 0,0625x^3 \dots R.)$$

so daß alle auf das erste folgende Glieder verneint werden. Die Reihe Q läßt sich gebrauchen, aus jeder gegebenen Zahl die Wurzel zu ziehen. Ist nämlich a irgend eine gegebene Zahl, und wollte man $\sqrt{a}$ vermittelst der Reihe Q finden, so sei das in der Reihe der Zahlen vor a zunächst vorhergehende Quadrat $= b^2$, dieß giebt

P 3

a =

$$a = b^2 \left(1 + \frac{a - b^2}{b^2} \right) \text{ also} \\ r a = r b^2 \left(1 + \frac{a - b^2}{b^2} \right) \\ = b \cdot r \left(1 + \frac{a - b^2}{b^2} \right)$$

c^2 sei das zunächst auf b^2 folgende Quadrat, daß also a zwischen b^2 und c^2 liegt, so ist $(c^2 - b^2) = 2b + 1$; (39) also höchstens $a - b^2 = 2b$, weil a und c^2 wenigstens um 1. verschieden sind; mithin ist niemals $\frac{a - b^2}{b^2} > \frac{2b}{b^2}$ oder niemals

$$\frac{a - b^2}{b^2} > \frac{2}{b}$$

Weil nun für $a = 3$ niemals $b^2 < 4$, also niemals $b < 2$, so ist offenbar niemals

$$\frac{2}{b} > 1 \text{ und daher niemals}$$

$$\frac{a - b^2}{b^2} > 1$$

aber auch für $x = 1$ convergirt noch die Reihe Q, folglich ist die Formel

$$r a = b r \left(1 + \frac{a - b^2}{b^2} \right) \text{ S.)}$$

allemaal brauchbar. Nur in dem Fall, wo $a < 4$ hat sie keinen Gebrauch, weil da $b = 1$ wäre; für

für diesen Fall hat man allemal

$$r a = 2 r \left(1 - \frac{4 - a}{4} \right) T.)$$

wobei man die Reihe R gebrauchen kann. Vermittelt dieser beiden Formeln S, T, werden die Reihen Q, R, auf alle Fälle anwendbar, obgleich dieses Verfahren oft auf sehr mühsame Rechnungen führt.

Die Lehre von dem Newtonischen Parallelogram werde ich nun, wie schon in der Vorrede erinnert worden, übergehen, und statt ihrer einer Lehre erwähnen, die so wichtig ist, und doch gewöhnlich denen, die sich nicht mit der Analysis des Unendlichen beschäftigen, unbekannt bleibt.

Von der Methode des Größten und Kleinsten; von den Tangenten der krummen Linien, den Wendungs- und Rückkehrpunkten.

I.

Es sei AGB irgend eine krumme Linie, fig. 1. 2. und man nehme eine willkürliche Ordinate DM; man ziehe ferner MF der Abscissenaxe AB gleichlaufend, so werden die beyden Ordinaten DM, EF, die zu zweyen verschiedenen

P 4

Abscis-