

Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

**Erläuterungen der kästnerischen Analysis endlicher
Größen**

Langsdorf, Karl Christian

Mannheim, 1776

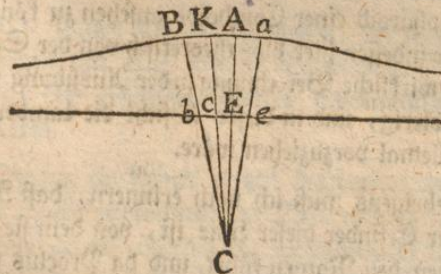
§. 477. Der Kreis, dessen Krümmung unter allen Kreisen der Krümmung einer krummen Linie an einem gegebenen Punkt am nächsten kommt [...]

[urn:nbn:de:bsz:31-412388](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:bsz:31-412388)

ziehe durch B und d die grade Linie B d e, so giebt sich in der Cissoide der Durchschnittspunkt e, und eine durch A und e gezogene grade Linie A f schneidet nun auf CD das C f ab, welches die erste von den beiden gesuchten Linien ist. Es würde unnöthig sein, auch noch den Beweis von diesem Verfahren herzusetzen, da die Aufgabe ohnehin von wenigem Nutzen ist. S. unten S. 508.

S. 477.

Der Kreis, dessen Krümmung unter allen Kreisen der Krümmung einer krummen Linie an einem gegebenen Punkt am nächsten kommt, heißt für diesen Punkt der krummen Linie der Krümmungskreis (circulus osculator) und dieses Kreises Halbmesser, der Halbmesser der Krümmung (radius osculi, radius euolutae) S. die Erläut.



zu S. 504. Sind nun B, K, a, Punkte, die nahe bei A liegen, so werden bC, cC, eC, EC nicht

nicht merklich von einander verschieden sein, aber überdas sind Bb , Kc , AE , ae , einander gleich, also werden auch BC , KC , AC , aC nicht merklich von einander verschieden sein; eine krumme Linie aber, in der alle Punkte von einem gewissen Punkt gleich weit abstehen, ist ein Kreis; also kann man, wenn a und B nahe bei A liegen, das Stück der Conchoide $BKAa$ als einen Bogen von einem Kreis ansehen, dessen Halbmesser CA ist; dieser Kreis ist also der Krümmungskreis, C allemal dieses Krümmungskreises Mittelpunkt, und CA der Halbmesser der Krümmung für den Punkt A der Conchoide. Es erhellt hieraus, daß sich die Conchoidenlinie $BKAa$ nur allmählig von der Kreislinie entfernt und ihrer Ase be als Asymptote immer paralleler wird. Diese Krümmung ist nun der Gestalt der Dauben eines Fasses völlig gemäß, und ich glaube daher mit Recht, ein Faß als das Sphäroid einer Conchoide ansehen zu können; ich rede indessen hier bloß theoretisch von der Sache, da die wirkliche Berechnung in der Ausübung wohl zu schwierig, und in dieser Absicht die Lambertsche noch allemal vorzuziehen wäre.

Uebrigens muß ich noch erinnern, daß Nicomed der Erfinder dieser Linie ist, von dem sie auch deswegen den Namen führt, und da Proclus schon dieses Geometern erwähnt, so ist diese Linie schon über 1300 Jahre alt.

Von

Von
Es wird
dieser Materie

Der M
bloß in der
nehmen;
Punkten ge
der Aufga
auch dieses
ich mich di
206. bedien

Er. I.
ner gegebene
nung absteht
suchten Pun
die der gege

II. C
gegebenen
hier ist de
ein Kreis.

Dst h
der Aufga
als einen g
Punkt, de
tern gemein

Von den geometrischen Orten.

Es wird nicht unnütz sein, zur Erläuterung dieser Materie noch folgende Sätze beizufügen.

Der Namen geometrischer Ort wird nicht bloß in der hier im Buche erklärten Bedeutung genommen; er wird nämlich ausserdem auch von Punkten gebraucht, so daß die Linie, in der nach der Aufgabe ein gewisser Punkt liegen muß, auch dieses Punkts geometrischer Ort heißt, wie ich mich dieses Namens schon in der Erläut. S. 206. bedient habe.

Ex. I. Einen Punkt anzugeben, der von einer gegebenen graden Linie um eine gewisse Entfernung absteht. Hier ist der Aufgabe oder des gesuchten Punkts geometrischer Ort eine grade Linie, die der gegebenen gleichlaufend ist.

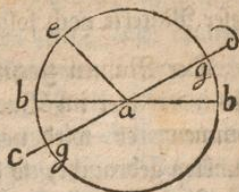
II. Einen Punkt anzugeben, der von einem gegebenen um eine gewisse Entfernung absteht; hier ist des gesuchten Punkts geometrischer Ort ein Kreis.

Oft hat ein Punkt wegen der verschiedenen in der Aufgabe vorkommenden Bestimmungen mehr als einen geometrischen Ort; alsdann giebt es einen Punkt, der diesen verschiedenen geometrischen Orten gemein ist, und dieß ist der gesuchte.

Ge 2

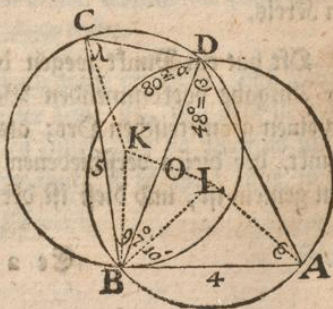
Ex.

Ex. I. Man sucht einen Punkt, der von a um eine Entfernung $= ae$ absteht, und der eine solche Lage hat, daß eine Linie durch ihn und a gezogen mit einer durch a gezogenen Linie ab einen gegebenen Winkel macht. Hier hat der gesuchte Punkt zween geometrische



Derter; der erste ist ein Kreis, der a b zum Halbmesser hat, der zweete eine grade Linie cd, die mit a b den gegebenen Winkel macht; in g, wo beide Derter, der Kreis und die grade Linie einander begegnen, ist der gesuchte Punkt, der also hier zweimal vorhanden ist. Dergleichen Aufgaben, wo Punkte gesucht werden, die durch verschiedene geometrische Derter bestimmt werden, können selbst in der practischen Geometrie vorkommen, da sogar ganz einfache geometrische Aufgaben solche Linien zu geometrischen Dertern haben können, die noch von höhern Ordnungen sind, als von der zwoten.

Ex. I. Von dem Viereck ABCD ist $AB=4$, $BC=5$, $ABC=97^\circ 10'$, $BDC=\alpha=80^\circ$, $\beta=48^\circ$ gegeben, man sucht den Ort des Pkts D.



Aufl.

Aufl.
messer ist,

34.) ergibt

dem Halb

schnitte in
Kreis, de
Punkts D
ge Halbme
die man a
schneiden,
messer AL
dieser gleich
sein.

Der
gemein
gesuchter
Viereck

II.
Punkts
und AB

a.

Auf. I. Der zu BC und α gehörige Halbmesser ist, wie die Gleichung $r = \frac{p}{2 \sin \psi}$ (E. S.

34.) ergibt, $= \frac{BC}{2 \sin \alpha}$, also mache man mit

dem Halbmesser $CK = BK = \frac{BC}{2 \sin \alpha}$ Durch-

schnitte in K, und beschreibe aus K mit KC den Kreis, den die Figur zeigt, dieser ist der Ort des Punkts D. Eben so ist der zu AB und β gehörige Halbmesser $= AB: 2 \sin \beta$, mit diesem mache man aus B und A Bögen die einander in L schneiden, und beschreibe nun aus L mit dem Halbmesser $AL = BL$ den zugehörigen Kreis, so muß dieser gleichfalls des Punkts D geometrischer Ort sein.

Der Punkt also, den beideörter mit einander gemein haben, wie hier D, bestimmt die Stelle des gesuchten Punkts, und nun kann man das ganze Viereck ABCD leicht verzeichnen.

II. Durch Rechnung giebt sich die Lage des Punkts D so. Es sei $AC = b$, $AB = c$, $BC = a$, und $ABC = \omega$, so ist

$$\sin \varphi = -\sin(\omega + \alpha + \beta + \lambda)$$

$$\frac{a \sin \lambda}{\sin \alpha} = BD = \frac{-c \sin(\omega + \alpha + \beta + \lambda)}{\sin \beta}$$

E 3 also

also

$$a. \sin \beta. \sin \lambda = -c. \sin \alpha. \sin (\omega + \alpha + \beta + \lambda)$$

und

$$a. \sin \beta = (-c. \sin \alpha. (\sin (\omega + \alpha + \beta). \cos \lambda + \cos (\omega + \alpha + \beta). \sin \lambda) : \sin \lambda \\ = -c. \sin \alpha. (\sin (\omega + \alpha + \beta). \cot \lambda + \cos (\omega + \alpha + \beta))$$

Mithin

$$- \frac{a}{c} \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} - \cos (\omega + \alpha + \beta) \\ \cot \lambda = \frac{\sin (\omega + \alpha + \beta)}{\sin \alpha. \sin \beta} \\ = - \frac{a}{c} \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \alpha. \sin (\alpha + \beta + \omega)} - \cot (\alpha + \beta + \omega)$$

und nun hat man auch den Punkt D. Man findet diese überaus wichtige Aufgabe von mehreren Schriftstellern analytisch aufgelöst z. E. von Hrn. Lambert in den Beiträgen zum Gebr. der Mathem. I. Th. 73. f. S. auch hat Tempelhof in seiner vollst. Anl. zur Alg. eine allgemeine Formel angegeben, die aber selbst nach Herrn Hofrath Kästners Urtheil lange nicht so geschmeidig und zur Ausübung so bequem sind, als die meinige. Zum Beweise, wie tief sich dieser große Geometer, den ich nicht bloß als meinen ehemaligen Lehrer, sondern selbst als meinen Gönner und Wohlthäter verehere, zu Lehrlingen herabläßt, muß ich noch erwähnen, daß

daß er mit
lösung die
habt, sent
de Zufälle

Von d
Summe Q
Verhältni
fi

Die Aufg
gemeinen
schließen
dieser Aufg
41. und es

Dorten	
hier	a
Dorten	
hier	

Dah

tan

welches

daß er mir nicht nur die gleichfolgende dritte Auflösung dieser Aufgabe zu geben die Gürtigkeit gehabt, sondern selbst zu der vorigen mir noch folgende Zusätze mitgetheilt hat:

Von den beiden Winkeln φ , λ , hat man die Summe $\varphi + \lambda = 360^\circ - (\alpha + \beta + \omega)$ und die Verhältniß ihrer Sinussen

$$\sin \varphi : \sin \lambda = a. \sin \beta : c. \sin \alpha$$

Die Aufgabe ist also von der Art, wie die in der gemeinen Trigon. aus zwei Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel, die Winkel zu finden. Zu dieser Aufgabe steht eine Formel 1. Astron. Abh. 41. und es ist $\alpha + \beta = \gamma$ gesetzt

Dorten	γ	$\sin \gamma$	$\text{Cof } \gamma$	α
hier	$\omega + \gamma - 180^\circ$	$-\sin(\omega + \gamma)$	$-\text{Cof}(\omega + \gamma)$	φ
Dorten	β	a	b	
hier	λ	$a. \sin \beta$	$c. \sin \alpha$	

Daher wird die Formel dorten (53) hier

$$\tan \lambda = - \frac{c. \sin \alpha. \sin(\omega + \gamma)}{a. \sin \beta + c. \sin \alpha. \text{Cof}(\omega + \gamma.)}$$

$$= \frac{a. \sin \beta}{c. \sin \alpha. \sin(\omega + \gamma)} + \text{Cot}(\omega + \gamma)$$

welches umgekehrt vorige Formel für $\text{Cot } \lambda$ giebt.

Ge 4

Man

Man hat auch aus angef. Astron. Abh. die halbe Summe und halbe Differenz der gesuchten Winkel so

$$\begin{array}{c|c|c} \text{Dorten} & \frac{1}{2} \gamma & \text{Cot } \frac{1}{2} \gamma \\ \hline \text{hier} & \frac{\omega + \gamma}{2} - 90^\circ & - \tan \frac{(\omega + \gamma)}{2} \end{array}$$

Dies giebt $\tan \frac{1}{2} (\varphi + \lambda) = - \tan \frac{1}{2} (\omega + \gamma)$,
oder $\frac{1}{2} (\varphi + \lambda) = 180^\circ - \frac{1}{2} (\omega + \gamma)$, welches
obnedem gleich die Figur zeigt. Ferner

$$\tan \frac{1}{2} (\varphi - \lambda) = - \tan \frac{1}{2} (\omega + \gamma).$$

$$\frac{a. \sin \beta - c. \sin \alpha}{a. \sin \beta + c. \sin \alpha}$$

oder $\tan \frac{1}{2} (\varphi - \lambda) = \tan \frac{1}{2} (\omega + \gamma).$

$$\left(\frac{1 - \frac{a. \sin \beta}{c. \sin \alpha}}{1 + \frac{a. \sin \beta}{c. \sin \alpha}} \right)$$

Für die angegebenen Werthe geschieht die Berechnung hier so: weil $a^2 + c^2 > b^2$, so ist ω stumpf. Nun ist, wenn statt ω , $b = 6$, gegeben wäre, $a + b + c = 15$, $a + b - c = 7$, $a + c - b = 3$,

$$b + c - a = 5, \text{ also } \sin \omega = \frac{r(15 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 5)}{2 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{3r7}{8}:$$

Ferner

Ferner

-18

Nun

gibet

Ferner $10 + \log 3 = 10,4771212$
 $\frac{1}{2} \log 7 = 0,4225490$

 $10,8996702$
 $\log 8 = 0,9030900$

$\log \tan \sin \omega = 9,9965802$
 gehört zu $82^\circ 49' 10''$
 also $\omega = 97^\circ 10', 50''$
 $\gamma = 128^\circ$

$\omega + \gamma = 225^\circ 10', 50''$
 $\frac{1}{2}(\omega + \gamma) = 112^\circ 35', 25''$
 $-\tan(67^\circ 24' 35'') = \tan \frac{1}{2}(\omega + \gamma)$

Nun ist $\frac{a}{c} = \frac{1}{4} = 1,25$, also

$\log \sin \beta = 9,8710735$

$\log \frac{a}{c} = 0,0969100$

$9,9679835$

$\log \sin \alpha = 9,9933515$

$0,9746320 - 1$

gibt $\frac{a \cdot \sin \beta}{c \cdot \sin \alpha} = 0,94326$; daher

$1 - \frac{a \cdot \sin \beta}{c \cdot \sin \alpha} = 0,05673$

$1 + \frac{a \cdot \sin \beta}{c \cdot \sin \alpha} = 1,94326$

Ge 5

Ich

Ich brauche $\log \tan 67^\circ 24' 30''$ statt

$$\log \tan \frac{1}{2}(\omega + \gamma) = 10,3808136$$

$$\log 0,05673 = 0,7538128 - 2$$

$$9,1346264$$

$$\log 1,9433 = 0,2885399$$

$$\log \tan \frac{1}{2}(\phi - \lambda) = 8,8460865$$

Diese Tangente ist verneint, weil $\tan \frac{1}{2}(\omega + \gamma)$ verneint ist. Also schließt man, sie gehöre einem verneinten Bogen zu, weil sie sonst, wenn sie einem beizahnten Bogen zugehörte, $\frac{1}{2}(\phi - \lambda)$ stumpf, folglich $\phi - \lambda > 180^\circ$ gäbe, welches offenbar nicht sein kann. Solchergestalt gehört der gefundene Logarithmus eigentlich zur $\tan \frac{1}{2}(\lambda - \phi)$, und es ist

$$\frac{1}{2}(\lambda - \phi) = 4^\circ 0' 47''.$$

$$\frac{1}{2}(\lambda + \phi) = 67^\circ 24' 35''.$$

$$\lambda = 71^\circ 25' 22''.$$

$$\phi = 63^\circ 23' 48''.$$

III. Die folgende Aufl. soll nur zur Erläuterung der geom. Derter, nicht zum wirklichen Gebrauch dienen. Man suche zuerst die Lagen der beiden Mittelpunkte K, L, wie vorhin gezeigt worden ist; der Winkel $\angle KBE = \omega - \angle CBK - \angle ABL = \omega - (90^\circ - \alpha) - (90^\circ - \beta) = \omega + \alpha + \beta - 180^\circ$. Im Dreieck KBL hat man BK, BL, KBL, also

so

so KL, di
BD und
OD=y;
man die f
(h-x)²
=g²-x²
x durch g
y=r(g
Dreieck B
den Winkel
des DB C
Winkel C
man des F
benen. J
Winkel der
die Weiter
mittelbar
E. Auf.)
x²+y²-
y²+z²-
x²+z²-
Aus di
chen, in d
(im Buch
zum wenig
re unbek
x nichts.

so KL, die h heißen mag. KL steht senkrecht auf BD und halbiert BD in O; man suche $LO = x$, $OD = y$; $KD^2 - KO^2 = LD^2 - LO^2$ d. i. wenn man die Halbmesser CK, BL; f, g heißt, $f^2 - (h - x)^2 = g^2 - x^2$ oder $f^2 - h^2 + 2hx - x^2 = g^2 - x^2$, oder $x = \frac{g^2 + h^2 - f^2}{2h}$; da man nun

x durch gegebene Größen hat, so hat man auch $y = \sqrt{g^2 - x^2}$, folglich auch $BD = 2y$. Im Dreieck BAD hat man die Seiten AB, BD, und den Winkel ADB, also findet man AD; im Dreieck DBC hat man die Seiten BD, BC, und den Winkel CDB, also findet man CD. So hat man des Punktes D Entfernung von den drei gegebenen. Ist es nöthig, so findet man auch die Winkel der Dreiecke. Es könnte einem einfallen, die Weiten $AD = x$, $BD = y$, $CD = z$, unmittelbar zu suchen. Das gieng so an (Trig. 20. S. Zuf.)

$$\begin{array}{ll} x^2 + y^2 - 2xy \cdot \cos \beta & = c^2 \text{ aus } \triangle ADB \\ y^2 + z^2 - 2zy \cdot \cos \alpha & = a^2 \quad \triangle BDC \\ x^2 + z^2 - 2zx \cdot \cos (\alpha + \beta) & = b^2 \quad \triangle ACD \end{array}$$

Aus diesen drei Gleichungen läßt sich eine machen, in der nur eine einzige unbekannte GröÙe ist (im Buche 102.) Aber diese Gleichung muß zum wenigsten vom dritten Grade sein. Denn ihre unbekannte GröÙe sei z. E. x, so hat man von x nichts angenommen, das nicht auch von y und z göl-

z gölte, nur die gegebene Grösse ändert z. E. β in α , c in a. Und die gegebene Grössen sind alle zusammen in der letzten Gleichung, also muß in dieser Gleichung x zugleich auch y und z bedeuten, oder sie hat gewiß drei Wurzeln. Man müßte also wenigstens eine cubische Gleichung auflösen, und wenn man dieses, welches so gar leicht nicht ist, gethan hätte, müßte man erst wieder untersuchen, welche von ihren drei Wurzeln AD oder BD oder CD wäre. In der bisherigen Rechnung könnte sich manches ändern, wenn die Lage der vier Pkte gegen einander von der, welche die Figur darstellt, sehr verschieden wäre. Z. E. die beiden Mpte K, L, könnten beide auf der Seite von BD liegen, auf der A liegt; da wäre $x > h$, und $h - x$ verneint. Lügen K, L, beide auf der Seite von BD, wo C liegt, so bekäme ein x einen verneinten Werth. Wäre α stumpf, so läge K nicht auf der Seite von BC, auf der BD liegt, sondern auf der entgegengesetzten. Nämlich $KBC = KCB$ würden verneint. Eben so, wenn β stumpf wäre, lägen L und BD auf entgegengesetzten Seiten von AB; D könnte selbst innerhalb des Dreiecks ABC liegen; da wäre $\alpha + \beta = 180^\circ$. Wenn man auf die bejahten und verneinten Grössen acht hat, wendet man leicht die vorige Formeln auf jeden vorkommenden Fall an; oder man kann sich auch für einen gegebenen Fall die Figur nur obenhin entwerfen, und alsdann eine solche Reihe Schlüsse, wie bei

bei gegenwärtigen
bringen, die
den wird.

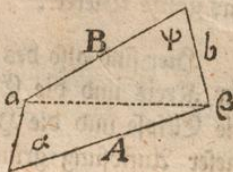
Er. II.
Seiten B,
y; der S
renz der be
und der A
das Viere
ohne die C
nometrisch
berechnen.

Aufst. I.
obere Dre
 $\alpha \vee \beta$ m
völlig,
(E. 20
gesucht,
durch d
Kreis und
der gegeb
ander lieg
stimmt

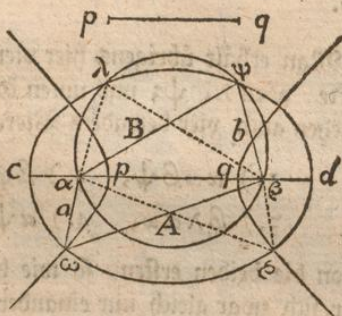
Nun
ten die S
= pg, se

bei gegenwärtiger Figur sind gemacht worden, anbringen, da man allemal auch das verlangte finden wird.

Ex. II. Aus der Summe der beiden obern Seiten B, b ; dem Winkel ψ ; der Summe und Differenz der beiden untern A, a ; und der Diagonale $\alpha \beta$; das Viereck zu verzeichnen, ohne die Seiten zuvor trigonometrisch zu berechnen.



Ausf. Das obere Dreieck $\alpha \psi \beta$ wird völlig, wie (S. 205.) gesucht, und durch den



Kreis und die Ellipse, deren Brennpunkte α, β , in der gegebenen Entfernung der Diag. $\alpha \beta$ von einander liegen, und deren Arc $cd = B + b$ ist, bestimmt

Nun sei die Differenz der beiden untern Seiten die Linie pq , so nehme man auf $\alpha \beta$ ein Stück $= pq$, so daß $p\alpha = q\beta$ wird, und setze dieß als die

die Ase einer Hyperbel an, deren Spitzen p, q ; und Brennpunkte α, β sind; nun verzeichne man die so bestimmte Hyperbel auf eben die Art, wie die Ellipse, so erhält man den Durchschnittspunkt der Ellipse mit der Hyperbel bei ω , und dadurch das ganze Viereck.

Hier sind also des Pkts ψ geometrische Derter der Kreis und die Ellipse; und des Pkts ω seine die Ellipse und die Hyperbel, und der Beweis zu dieser Auflösung gründet sich ganz auf 378 und 406.

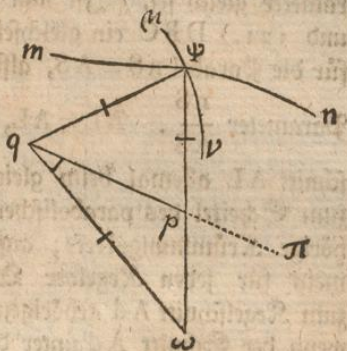
Man erhält übrigens hier vier Durchschnittspunkte, oben λ, ψ ; und unten ϕ, ω , und daher entstehen auch vier besondere Vierecke

- 1.) $\alpha\omega\beta\psi$, 2.) $\beta\phi\alpha\lambda$
3.) $\beta\lambda\alpha\omega$, 4.) $\alpha\psi\beta\phi$

wovon die beiden ersten, so wie die beiden letzten unter sich zwar gleich nur einander entgegengesetzt, jene aber von diesen völlig verschieden sind, ob sie gleich alle vier einerlei Inhalt haben. Dieß wird zugleich Anfängern begreiflich machen, wie man bei dergleichen Aufgaben unvermuthet auf biquadratische Gleichungen gerathen kann.

Er.

Er. III. Es ist in dem Dreieck $\omega \psi q$, das will-
führlich durch $q \pi$
getheilt ist, der Win-
kel $p q \omega$, ψq , ωq
und $p \psi$ gegeben,
man soll ωp , also
 $\omega \psi$ finden. Hier
ist des Punkts ψ
Ort 1.) der Kreis
 $\mu \psi v$, dessen Halb-
messer $q \psi$ ist, 2.)
die Conchoide



die Conchoide
 $m \psi n$, deren As-
ymptote $q \pi$, und da des Krümmungskreises
(Erl. §. 477.) Mittelpunkt ω , und die beständige
Linie a (§. 479.) $= p \psi$ ist *). Dieß wird An-
fängern zeigen, wie es selbst in der praktischen
Geometrie Fälle geben kann, wo man auf die Be-
trachtung solcher Linien geführt wird, die sie sonst
nur für geometrische Erdichtungen halten mögten.

§. 504.

Aus der Gleichung (Erl. E. 209.)

$$r = \frac{1}{2} a$$

folgt, daß der Halbmesser der Krümmung am
Ehei-

*) Es ist sehr leicht, die Muschellinie oder Conchoi-
de $m \psi n$ durch eine stetige Bewegung, wie hien
eigentlich erfordert wird, zu beschreiben, und weil
jeder von selbst auf solches Mittel verfallen kann,
so halte ich mich nicht dabei auf.